

20.9.2012

14. Úloha

I. Zadání

Moving cylinder

Place a sheet of paper on a horizontal table and put a cylindrical object (e.g. a pencil) on the paper. Pull the paper out. Observe and investigate the motion of the cylinder until it comes to rest.

II. Úvod

Naším úkolem je vysvětlit a popsat pohyb válce, pod kterým byl vytažen papír. Je zřejmé, že k řádnému vyřešení úlohy bude podstatné obměňovat některé parametry, jako jsou například smykové tření mezi válcem a papírem, poloměr válce, rychlost a způsob vytažení papíru, což jsou všechno parametry, které v zadání nebyly blíže specifikovány a přitom jistě hrají v tomto jevu nějakou roli.

III. Teorie

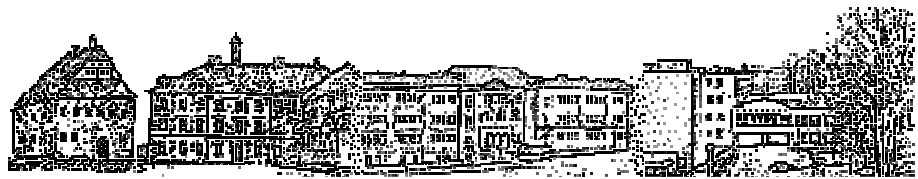
Při prvních experimentech jsme pozorovali, že při středně rychlém vytahování papíru se válec roztočil kolem své osy, ale vůči podložce nezměnil svou polohu. Po papíru se pohyboval rychlostí, která byla rovna rychlosti vytahování papíru a protože se na papíru nesmýkal, tak ta rychlost byla rovna i rychlosti obvodové.

Při rychlém vytažení s sebou válec jen lehce cuknul, což je známý table-cloth trick .

Při relativně pomalém vytažení se válec pomaličku roztáčel jako v prvním případě, ale obvodová rychlost nebyla rovna rychlosti vytahování a tak se váleček posouval společně s papírem.

Všechny tři případy mají jedno společné, váleček se nepohyboval po směru rotace, kterou získal při vytahování papíru.

Předpokládejme, že válec i podložka jsou dokonale tvrdé a válec je dokonale oválný. To teda znamená, že mezi válcem a podložkou není žádný valivý odpor. V takovém případě na váleček působí jen třecí síla vytahovaného papíru. Tato síla válec roztáčí a zároveň urychluje i jeho těžiště (vůči papíru).



Z následujících zákonů budeme moct odvodit výsledný vztah. Nejdřív druhý Newtonův zákon a jeho analogie pro otáčivý pohyb:

$$F = m \cdot a$$

$$N = I \cdot \varepsilon$$

Kde N je moment síly a lze určit ze vztahu

$$N = F \cdot R,$$

I je moment setrvačnosti, který je pro plný váleček roven

$$I = \frac{1}{2} m \cdot R^2$$

a ε je úhlové zrychlení.

Po dosazení do druhého vztahu získáme

$$F \cdot R = \frac{1}{2} m \cdot R^2 \cdot \varepsilon$$

Z tohoto vztahu vyjádříme sílu a můžeme porovnávat s druhým Newtonovým zákonem s ohledem na to, že úhlové zrychlení má opačný směr než zrychlení těžiště.

$$m \cdot a = -\frac{1}{2} m \cdot R \cdot \varepsilon$$

$$a = -\frac{1}{2} R \cdot \varepsilon$$

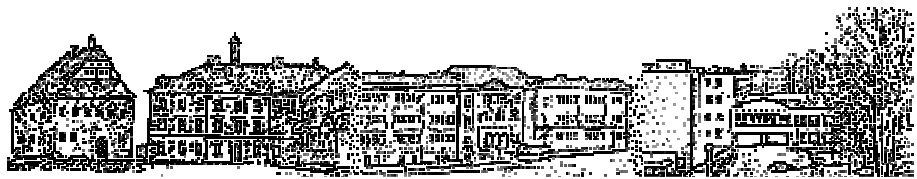
$$\frac{a}{\varepsilon} = -\frac{1}{2} R$$

Z této rovnice vyplývá, že poměr zrychlení těžiště a úhlového zrychlení je konstantní a vůbec nezávisí na průběhu síly. Stejný je i poměr mezi rychlostí těžiště a obvodovou rychlostí:

$$\frac{v}{\omega} = -\frac{1}{2} R$$

V experimentech jsme si všimli, že po vytažení papíru se váleček na místě protočil, tj. podkluzovalo mu to. Kdyby mu to nepodkluzovalo, pak by platilo, že obvodová rychlost se rovná rychlosti těžiště:

$$v = \omega \cdot R$$



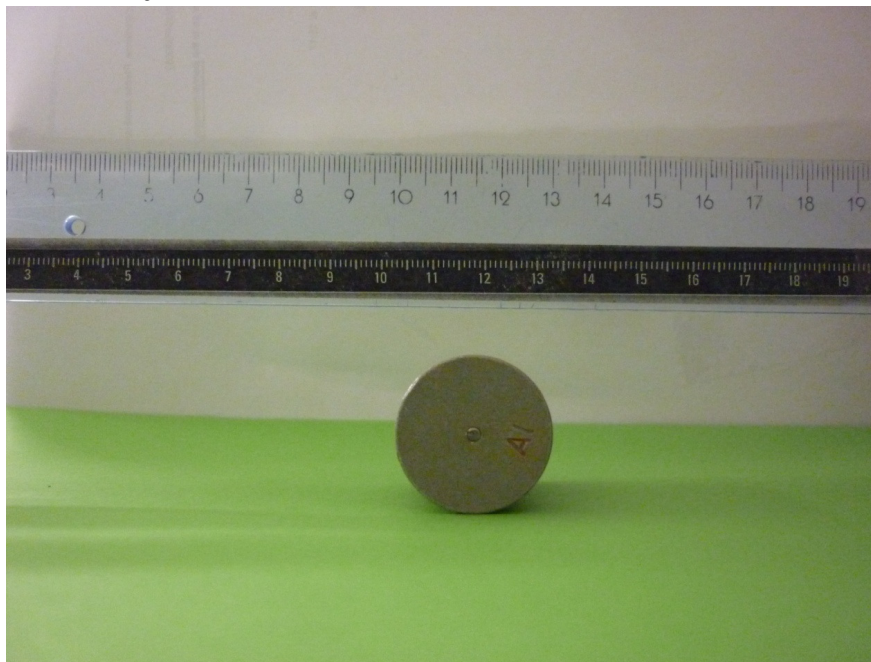
Tato rovnice však vyhovuje první rovnici jen tehdy, když se rychlost těžiště rovná nule (obvodová rychlost se nule rovnat nemůže) - z toho vyplývá, že v každém případě to bude válečku po vytažení podkluzovat a bude se chvíli protáčet, než se vlivem tření zastaví. V každém případě by se ale váleček (při splnění všech výše uvedených podmínek) neměl po vytažení papíru vůči stolu pohybovat.

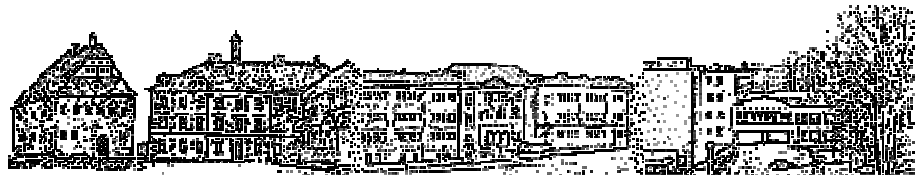
Skutečnost je však jiná. Při vytahování papíru zpod válce si můžeme všimnout (zejména při pomalejším vytahování), že válec se otáčí ale zároveň se i s papírem posouvá pryč. To je způsobeno tím, že valivý odpor nemůžeme tak úplně zanedbat. Válec se pak chová tak, že získá jak rotaci, tak hybnost ve směru vytahování papíru a tak po úplném vytažení papíru se nejdříve na místě protočí a pak se pomalu a zpomalně pohybuje ve směru vytažení papíru.

Výpočty k tomuto jevu jsou však mnohem náročnější a tak jsme se rovnou vrhli na experimenty.

IV. Experimenty

Experimentálně jsme ověřili platnost našich kvalitativních teoretických předpovědí. Postupně jsme používali hliníkový válec o průměru 2,5 cm a hmotnosti 40 g a ocelový váleček o průměru 2,5 cm a hmotnosti 100 g. Jako papír jsme používali klasický kancelářský papír a podložka byla střídavě sklo, dřevo a kancelářský papír. Ve všech experimentech se váleček choval kvalitativně stejně.





20.9.2012

V. Závěr

K této úloze jsme podali poměrně přesný kvalitativní popis děje. V teoretickém rozboru jsme zanedbali valivý odpor, který se v dalších výpočtech pokusíme více zohlednit a který spolu s výpočty o hybnosti dá popis celého problému.