

Гидравлический прыжок

Доклад

1 Добрый день, уважаемое жюри, команды-соперницы и зрители. Я, Глебов
Артем, имею честь представить вашему вниманию доклад сборной 11-х классов лицея
БГУ по задаче «Гидравлический прыжок».

2 На экране вы можете видеть условие этой задачи.

По условию требуется изучить природу явления. С нашей точки зрения, это
3 значит:

- определить причину и условия образования прыжка,
- качественно описать его структуру,
- создать математическую модель явления
- и предсказать с ее помощью параметры прыжка.

В нашем исследовании мы придерживались экспериментального подхода,
поэтому в докладе нашли отражения только те явления, которые непосредственно
наблюдались на опыте.

Для постановки опытов мы собрали экспериментальную установку, ключевыми
элементами которой являлись насадка с круглым выходным отверстием, создающая
цилиндрическую струю, и горизонтальная стеклянная пластина, размерами 40 на 50
сантиметров, на которую эта струя падает. Насадка с помощью шланга подключалась
напрямую к водопроводному крану, который позволял регулировать расход жидкости в
довольно широких пределах.

4 В первую очередь мы выяснили, при каких условиях возможно образование
гидравлического прыжка. Как оказалось, решающим фактором в этом случае является
высота внешнего по отношению к прыжку слоя воды, при этом интервал, в пределах
которого может существовать прыжок, ограничен как сверху, так и снизу.

При уменьшении внешней высоты вплоть до нуля, радиус увеличивается и
стремится к бесконечности, то есть фактически прыжок не образуется.

5 Напротив, при увеличении высоты слоя прыжок уменьшается в размерах, что
вы можете видеть на представленном видео. Заметим, что при достижении некоторого
6 предельного значения высоты прыжок смыкается. Используя покадровый просмотр
данного видео, мы смогли построить график зависимости радиуса прыжка от высоты
внешнего слоя. Кроме того, мы исследовали зависимость предельного значения внешней

7 высоты от объемного расхода жидкости в струе, что позволило построить диаграмму существования прыжка, где по оси абсцисс откладывался объемный расход, а по оси ординат – соответствующее предельное значение внешней высоты. Определенная комбинация расхода и высоты приводит к образованию прыжка в том случае, если соответствующая ей точка лежит внутри заштрихованной области.

Какими причинами обусловлено возникновение гидравлического прыжка? Для ответа на этот вопрос необходимо понять, как движется жидкость вблизи прыжковой области. С этой целью мы добавляли в воду марганцовку и по поведению окрашенной жидкости судили о направлении и величине скорости в различных точках течения.

8 С удивлением, мы обнаружили, что, кроме очевидного радиального растекания жидкости от струи, существует и обратное ее движение – к прыжку. Опытное подтверждение этого факта вы можете видеть на представленном видео.

9 В гидродинамике возникновение обратного тока связывается с разделением пограничного слоя и его отрывом. Поэтому мы предположили, что именно пограничные явления будут определяющими в образовании прыжка.

10 На наш взгляд, механизм его образования следующий. При радиальном растекании по поверхности толщина слоя жидкости убывает по мере удаления от струи. В какой-то момент она достигает критического значения, по порядку величины равного толщине пограничного слоя. При этом резко увеличившееся влияние вязкости приводит к значительному уменьшению скорости потока. Из условия неразрывности потока высота слоя жидкости при этом резко возрастает, и, как следствие, пограничный слой разделяется, образуя обратное течение.

Объяснив причину образования прыжка, мы изучили зависимость основного его параметра – радиуса – от свойств жидкости и параметров струи.

11 В первую очередь мы сравнили прыжок, возникающий при использовании воды, и прыжок, образующийся с применением более вязкой жидкости. Для этого, конечно, пришлось применить несколько иную установку, схему которой вы можете видеть на слайде. В качестве рабочей жидкости мы избрали подсолнечное масло, измеренная вязкость которого почти на два порядка больше вязкости воды. Результат оказался достаточно предсказуемым. Характерный радиус масляного прыжка составил 3 мм, в то время как для воды соответствующее значение – около 5 см, т.е. на порядок больше.

12 Таким образом, мы смогли ответить на один из вопросов задачи. При использовании более вязкой, чем вода, жидкости прыжок становится меньше и стабильнее, чем водный.

13
14
15
16
17
18

Далее было проведено исследование явления при различных диаметрах падающей водной струи. Радиус изменялся благодаря применению насадок с различными диаметрами выходных отверстий: от 2 до 10 мм. Прямой зависимости между радиусом прыжка и диаметром струи не наблюдалось, зато чётко прослеживалась зависимость радиуса прыжка от расхода жидкости. На графике вы можете видеть, что зависимость эта одинакова для всех насадок. Для построения данного графика было проведено порядка 600 измерений – по 10 для каждой точки.

Ввиду сложности взаимодействий, имеющих место в данном явлении, для создания его математической модели нам пришлось выйти за рамки школьно курса математики и перейти на язык дифференциальных уравнений.

Запишем общее уравнение гидродинамики – уравнение Навье-Стокса, выражающее не более, чем второй закон Ньютона применительно к элементарному объёму жидкости. Мы будем считать жидкость несжимаемой и рассматривать только стационарный режим течения.

Исходя из очевидной осевой симметрии, выберем для нашего описания цилиндрическую систему координат, направления осей которой показано на рисунке, а начало отсчета совместим с точкой падения струи на плоскость. В проекциях на оси данной системы координат, упрощенное уравнение Навье-Стокса запишется в следующем виде.

Полученные два уравнения дополним условием постоянства потока в любом сечении (это следствие уравнения неразрывности). Образованная система не имеет аналитического решения, поэтому нам пришлось пойти на определенные упрощения.

Для начала применим метод гидродинамического подобия, суть которого заключается в том, что мы вводим, условно говоря, новую систему единиц, где в качестве масштабов выбираем размерные величины r_* , z_* , u_* и w_* . Исходя из правила размерностей, записываем систему уравнений, однозначно определяющую значения введенных нами характерных масштабов. Уравнение данной системы получены из соответствующих уравнений исходной.

Тогда радиус прыжка можно выразить через характерный масштаб r_* и некоторую константу, значение которой необходимо определить экспериментально. Таким образом, наша теория предсказывает степенной вид зависимости радиуса от объемного расхода с показателем степени $5/8$.

Прервёмся на время и проанализируем полученные ранее экспериментальные зависимости. По методу наименьших квадратов, определим коэффициент степени в зависимости: он оказывается равным 0.73. Это значение достаточно близко к

19 полученному теоретически и качественно с ним согласуется. Основными же причинами их численного несовпадения, на наш взгляд, являются:

1. неучтенные явления поверхностного натяжения,
2. поверхностные волны в системе,
3. неустойчивость прыжка, который лишь с долей допущения может быть назван стационарным, например, из-за изменения расхода жидкости.

20 Погрешности наших измерений изменялись от точки к точке, но в среднем составили 4% для расхода и 7% для радиуса прыжка.

21 С учетом полученных зависимостей радиуса прыжка от расхода жидкости в струе и высоты внешнего слоя жидкости мы можем построить качественный график, который мы назвали «поверхностью существования прыжка», т.к. для любого прыжка с фиксированными параметрами q и h точка, соответствующая комбинации этих параметров и радиуса должна лежать на данной поверхности. Общий вид эмпирической формулы вы можете также видеть на экране.

Получив экспериментальное подтверждение нашей теории, мы решили не останавливаться на определении радиуса и описать также с помощью нашей модели течение внутри слоя жидкости, и, кроме того, получить уравнение для профиля нашего потока.

22 Для этого вернемся к нашей системе и перепишем ее в безразмерном виде с учетом введенных характерных масштабов. После сокращения образуется параметр ε . Оценив его исходя из характерных величин z_* и r_* , получим для него значение порядка одной сотой. Поэтому слагаемые, содержащие степени ε^2 и выше, можно опустить ввиду их малости.

23 Упрощённые уравнения выглядят следующим образом. Обратите внимание: первое уравнение совпало с уравнением Прандтля для ламинарного пограничного слоя. Это ещё раз подтверждает нашу гипотезу о том, что пограничные явления доминируют в структуре течения.

24 Необходимо определиться с профилем скорости в сечении. Будем аппроксимировать его в виде полинома. Из граничных условий следует, что скорость потока на дне обращается в нуль, а на поверхности равна нулю ее производная по z . Вдобавок, нами экспериментально доказано существование обратного тока жидкости
25 вблизи дна. Описанными свойствами обладают полиномы с третьей степени и выше. Поэтому распределение скорости в сечении представим в виде кубического полинома. Из указанных граничных условий мы не можем определить связь между всеми тремя коэффициентами. Поэтому введем параметр λ , зависящий от координаты r ,

26 произвольным образом связав его с одним из коэффициентов, например, положив $a = \lambda + 3$.

Так как имеются две зависящие от r величины - h и λ , то для их определения необходимо иметь систему из двух независимых уравнений. Одно из них получим, проинтегрировав первое уравнение нашей безразмерной системы по z от 0 до h , а второе, записав это же уравнение для $z = 0$.

27 Образованная система может быть решена численными методами, что и было реализовано на основе пакета Mathematica 5.0. Полученный в результате решения профиль потока вы можете видеть на экране.

Подставив в исходный кубический полином полученное решение для λ , можем построить профиль скорости воды в области прыжка. Как видно, он отвечает требованиям, которые мы выдвинули.

Обратите внимание на область обратного тока - после прыжка профиль скорости выгибается в отрицательном направлении.

Полученный результат качественно согласуется с экспериментом. Более детальное количественное подтверждение полученной теории было затруднено в связи с необходимостью точного измерения скоростей воды в потоке.

28 Очередной проверкой теории стало построение трехмерной модели гидравлического прыжка, которая, как вы можете убедиться, хорошо соответствует действительности.

29 Таким образом, нами было установлено, что гидравлический прыжок – явление, связанное с разделением пограничного слоя и образованием обратного тока жидкости. Было исследовано влияние вязкости, разработана математическая модель, описывающая поведение жидкости и адекватно прогнозирующая качественные зависимости, наблюдаемые на опыте. Также были проанализированы условия возникновения прыжка и установлена взаимосвязь между его основными параметрами. Однако мы не собираемся останавливаться на достигнутом и надеемся на продуктивное обсуждение нашей работы, которое может стать стимулом к новым исследованиям.

30 На этом все. Спасибо за внимание.