Научно-методический журнал
Государственного комитета СССР
по народному образованию

Москва «Педагогика»
Издается с мая 1934 года
Выходит один раз
в два месяца

МАТЕМАТИКА 2·90 В ШКОЛЕ

МАРТ — АПРЕЛЬ

СОДЕРЖАНИЕ

Сдано в набор 8.02.90. Подписано в печать 14.03.90. Формат $84\times100^1/_{16}$. Печать высокая. Бумага тип. № 2. Усл. печ. л. 8,4. Усл. кр.-отт. 9,24. Уч.-изд. л. 11,54. Тираж 429 035 экз. Заказ 5255. Цена 45 коп.

Издательство «Педагогика» Академии педагогических наук СССР и Государственного комитета СССР по печати.

Адрес издательства: 107847, Москва, ГСП, Б-05, Лефортовский пер., д. 8.

Адрес редакции: 129278, Москва, ул. Павла Корчагина, д. 7 Телефон: 283-85-83.

Набрано в ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Государственного комитета СССР по печати. 142300, г. Чехов Московской обл.

Отпечатано в Московской типографии № 13 ПО «Периодика» Государственного комитета СССР по печати. 107056, Москва, Денисовский пер., д. 30. Заказ 49

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ вычисляется так:

$$H=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}},$$

значит, средняя гармоническая радиусов вневписанных окружностей треугольника будет равна $\frac{3}{\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}}$. Преобразуем третью часть этой величины:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}}=\frac{1}{\frac{r_br_c+r_ar_c+r_ar_b}{r_ar_br_c}}=\frac{r_ar_br_c}{r_br_c+r_ar_c+r_ar_b}.$$

Если учтем равенства (2) и (3), будем иметь:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}}=\frac{pS}{p^2}=\frac{S}{p}=\frac{pr}{p}=r.$$

Очевидно следующее следствие этой теоремы:

$$\left(r=\frac{1}{\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}}\right)\to\left(\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right),\text{ т. е.}$$

обратное значение радиуса вписанной окружности равно сумме обратных значений радиусов вневписанных окружностей треугольника.

III. Упражнения.

1. Построить треугольник ABC, если известна сторона AB, радиус r вписанной окружности и радиус r_c вневписанной окружности, касающейся стороны AB и продолжения сторон AC и BC. (Задача решена в «Энциклопедическом словаре юного математика». С. 189.)

2. Доказать, что наименьшее числовое значение выражения $\frac{r_a^2+r_b^2+r_c^2}{p^2}$ равно единице.

3. Доказать, что наименьшее числовое значение выражения $\frac{r_a^2+r_b^2+r_c^2}{r^2}$ равно 27.

4. Доказать, что для любого треугольника справедливы равенства: 1) $S^2=r\cdot r_a\cdot r_b\cdot r_c$; 2) $4\left(\frac{1}{h_a^2}+\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}\right)=\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r_a^2}+\frac{1}{r_b^2}+\frac{1}{r_c^2}$, где h_a, h_b, h_c — высоты треугольника.

Кубанские ЛФМШ

В. А. Лазарев, Б. Е. Левицкий (Краснодар)

Мы познакомим читателей с опытом организации и проведения летних и зимних физико-математических школ (ЛФМШ, ЗФМШ).

Отличительной чертой сезонных профильных школ является то, что они возникли и действуют в результате огромных усилий со стороны энтузиастов. Отсюда новизна практикуемых в них педагогических приемов, программ, распорядка дня и форм учебной работы.

Основная масса учащихся летних школ являются победителями и призерами районных, городских и краевых олимпиад, приглашаются в летние школы учащиеся специализированных математических классов, ребята, активно работающие в ЮМШ и ВЗМШ, отличившиеся в «Турнире городов», который проводит журнал «Квант». Поэтому есть основания говорить о них как о контингенте школьников, проявляющих устойчивый интерес к математике и, безусловно, имеющих определенные математические способности.

Начиная с 1984 г. по инициативе и под руководством преподавателей математического и физического факультетов Кубанского госуниверситета проведены 6 летних и 4 зимних физико-математических школ. Первые летние школы проходили в станице Тамань, знаменитой ныне не только своими виноградниками, но и музеем М. Ю. Лермонтова, прекрасным театром казачьего фольклора и богатыми находками археологических раскопок. Место уютное и спокойное, что имеет, как показывает наш опыт, немаловажное значение для успешной работы школы. Однако трудности с организацией быта и учебной работы привели к тому, что сначала зимние, а затем и летние школы стали проводиться в Сочи на базе школы-интерната № 2. Решение организационных вопросов значительно облегчилось. Появилась возможность ездить на интереснейшие экскурсии (Сочинский дендрарий, Ново-Афонские пещеры, обезьяний заповедник в Сухуми и т. д.), но обилие соблазнов создавало другие трудности, преодоление которых требовало немалой изобретательности от администрации ЛФМШ, вожатых и преподавателей. Необходимо было создать оптимальное сочетание разумной требовательности и дисциплины с необходимой свободой, которая в любом случае молодому поколению кажется недостаточной. В ЛФМШ-89 прямым тайным голосованием на альтернативной основе был выбран совет школы, в состав которого вошли 3 преподавателя, 4 вожатых из числа студентов и 5 школьников. Советом был разработан проект конституции, обсуждение и доработка которого завершились незадолго до конца работы школы. Проект был в целом одобрен общешкольным собранием и будет использоваться в будущих зимних и летних школах (совет школы сохраняет свои полномочия в очередной зимней школе).

Конституция определила права и обязанности учащихся ЛФМШ, функции и полномочия совета школы, права педагогического коллектива и администрации. Ее появление

да и сам процесс доработки и подготовки сняли ряд педагогических проблем.

Кубанские школы стали традиционными, но содержание и формы работы меняются, поиск продолжается. Остается лишь то, что выдержало испытание временем. Если в первых школах основную часть учебного времени занимали математика и физика, то начиная с ЛФМШ-86 треть учебного времени в расписании занятий отводится на информатику.

Сначала в распоряжении преподавателей ЛФМШ были только программируемые микрокалькуляторы, затем несколько простейших персональных компьютеров. В ЛФМШ-88 занятия по информатике проводились в Сочинском УПК, оборудованном вычислительным комплексом «Ямаха», и, кроме того, несколько ПЭВМ, предоставленных Институтом проблем информатики АН СССР, были установлены в самой школе. В ЛФМШ-89 был создан дисплейный класс, полностью оборудованный КУВТ «Ямаха» и работавший ежедневно. Каждый учащийся проработал за персональным компьютером в среднем около 15 ч, а отдельные школьники — значительно больше.

Программы учебных занятий летних школ по математике и физике из года в год обновляются, но остается их главная нацеленность на укрепление и расширение знаний, полученных в школе, обучение специальным методам решения элементарных задач, привитие навыков самостоятельных исследований. Среди основных учебных курсов по математике, читавшихся в летних школах в разное время,— курсы «Приложения дифференциального и интегрального исчисления». «Комплексные числа и простейшие функции комплексного переменного», «Проективная геометрия», «Теория вероятностей» (для школьников X класса), «Теория чисел», «Алгебра многочленов», «Элементы математической логики и логические задачи» (для учащихся IX класса) и др. Чтение основных курсов сопровождалось практическими занятиями.

Помимо основных учебных занятий, проходивших до обеда, школьникам предлагалось 15—20 спецкурсов по математике, физике и информатике, с рекламой которых преподаватели выступали на пресс-конференции после открытия школы. Два спецкурса, собравшие наибольшее число слушателей, получили статус факультативов и выносились за рамки учебного расписания. Посещение спецкурсов по выбору было обязательным (1 ч после ужина ежедневно, кроме субботы и воскресенья), а факультативов — свободным. Факультативными были также регулярно читаемые в наших летних школах лекции по астрономии с наблюдениями звездного неба и спецкурс «Язык ли музыка?» с прослушиванием уникальных записей классической музыки.

Одной из важных задач, решаемых в сезонных профильных школах, является создание атмосферы индивидуального и коллективного творчества. Этому способствует, на наш взгляд, система турниров и олимпиад, принятая в кубанских ЛФМШ.

Наиболее распространенной формой таких состязаний по математике и физике являются очные олимпиады, в которых школьники за определенное время самостоятельно решают предложенные им задачи. Успех на таких соревнованиях, как правило, свидетельствует о хорошей подготовке ученика по предмету, его умении действовать нешаблонно, отыскивать свой путь решения задачи. В то же время сравнительный неуспех в олимпиаде не позволяет сделать вывод о недостаточной, скажем, математической подготовленности учащегося и тем более о его математических способностях. Поэтому наряду с очными олимпиадами проводятся также заочные соревнования, в которых задания выдаются на длительное время, причем подобные задачи предполагают проведение небольших исследований и содержат возможности для обобщений и построения самостоятельных теорий.

Однако время ученых, способных в одиночку справиться с серьезными научными проблемами, уходит. Трудные задачи решаются сейчас целыми коллективами ученых. Поэтому особенно актуальным становится обучение школьников навыкам коллективного творчества. Этой цели служат так называемые очные коллективные олимпиады, в которых участники делятся на команды по 7—10 человек, разные команды не имеют возможности общаться между собой, и каждая команда представляет в жюри свое решение. В ходе коллективного обсуждения задач внутри команд менее подготовленные школьники не только быстро осваивают незнакомые им методы решения, но и имеют больше возможностей проявить свою изобретательность, чем при индивидуальном подходе к решению, так как зачастую для появления верной идеи оказывается достаточно выслушать несколько точек зрения на путь решения задачи. С другой стороны, коллективное обсуждение учит всех школьников более четкому и ясному изложению своих замыслов, умению отстаивать свой подход к решению задачи либо находить в нем ошибки.

Принципы отбора учащихся в летнюю физико-математическую школу позволяют еще до приезда школьников разделить их на три примерно равные по силам разновозрастные группы, называемые клубами. С первых дней работы школы учащиеся приступают к решению задач заочных олимпиад по математике и физике. По результатам заочной олимпиа-

ды и с учетом прежних заслуг каждый клуб делится на одинаковое число разновозрастных команд, которые упорядочиваются по силам, и соответствующие команды разных клубов соревнуются между собой во время второго тура очной коллективной олимпиады. В ЛФМШ-89 для проведения коллективной олимпиады клубы были разделены на команды «Алгебра», «Логика», «Геометрия», «Анализ», и одноименные команды разных клубов соревновались между собой в решении задач, бо́льшая часть которых относилась к соответствующему разделу математики.

Наконец, заключительным и самым торжественным этапом соревнований является математический (физический) бой между сборными командами клубов, который проходит по правилам, близким к правилам московских турниров юных физиков (система «докладчик—оппонент—рецензент»), с обязательным применением компьютеров, активным участием болельщиков, приносящих очки своим командам, использованием традиционных для КВН элементов в домашних заданиях и форме проведения боя. Основные задачи для этого соревнования жюри выбирает из числа наиболее трудных, предлагавшихся на предыдущих турах, и сообщает их соревнующимся командам за некоторое время до начала боя. В домашнее задание входит задача по программированию, которая разыгрывается по турнирным правилам наряду с другими задачами. Среди задач, предлагаемых во время боя командам и болельщикам, «выездное» задание по программированию (на час-полтора работы), разнообразные задачи-шутки и игровые соревнования на персональных компьютерах. Члены команды-победительницы, а также победители заочных олимпиад получают приглашения в очередную зимнюю физико-математическую школу.

С первых летних школ перед преподавателями стоял вопрос об организации такой обратной связи с учащимися, которая позволила бы выяснить степень восприятия каждым школьником изучаемого материала. В связи с этим в ЛФМШ-89 было решено ввести зачеты по основным курсам (математика, физика, информатика) и спецкурсам. Причем удостоверение об окончании ЛФМШ выдавалось лишь в том случае, если школьник сдавал зачеты по всем основным курсам и трем спецкурсам по выбору. В итоге если в первых летних школах удостоверения об окончании ЛФМШ выдавались практически всем учащимся, то в ЛФМШ-89 около 15 % школьников таких удостоверений не получили. Зачеты были дифференцированные, причем около половины школьников получили на зачетах только отличные и хорошие оценки. Любопытно заметить, что эти цифры (50 и 15 %) практически совпадают с оценками, данными коллективу учащихся ЛФМШ психологами на основе тестирования для определения интеллектуальных возможностей школьников. Оказалось, что около половины слушателей имеют интеллектуальный потенциал выше среднего уровня, а процентов 10—15 — ниже среднего уровня. Хотя индивидуальное сравнение результатов тестирования и результатов учебы далеко не всегда давало такое сходство.

Лето — пора школьных каникул, поэтому весьма существенно организовать досуг школьников так, чтобы усталость не накапливалась и учащиеся возвращались домой здоровыми и бодрыми. Ежедневная утренняя зарядка на берегу моря и морские купания, экскурсионные поездки и спортивные состязания, дискотеки и вечера отдыха позволяли в достаточной мере восстанавливать силы. Как показывает опыт работы, принятая в кубанских школах учебная нагрузка вполне по силам учащимся VIII—X классов.

Самой трудной проблемой, с которой пришлось столкнуться организаторам летних профильных школ, является проблема их материального обеспечения. Если сравнивать первую кубанскую летнюю школу, организованную как загородный пионерский лагерь с питанием из расчета 1 руб. 23 коп. в сутки, в которой все преподаватели работали во время собственного отпуска и бесплатно, причем все канцелярские товары приобретались энтузиастами за свой счет, с ЛФМШ-89, то можно сказать, что шаг вперед сделан. Летняя школа функционировала как профильный оздоровительный лагерь старшеклассников с питанием из расчета 1 руб. 63 коп., к которым Краснодарское отделение Детского фонда добавило 1 р. на каждого школьника и вожатого. Кроме того, Детским фондом были выделены средства на экскурсионную поездку в Новый Афон (вместе это составило 5 тыс. руб.). Координационный совет Краснодарского центра НТТМ при крайкоме ВЛКСМ выделил 4 тыс. руб. на работу с одаренными детьми, основная часть которых пошла на приобретение призов, спортивного инвентаря, канцелярских товаров и учебного оборудования. В результате каждый выпускник летней школы получил подписку на журнал «Квант» вместе с подборкой книг из «Библиотечки "Квант"». Призеры олимпиад и конкурсов, ребята, отличившиеся в общественной жизни школы, были награждены популярными книгами по математике и физике, подписками на научно-популярные и художественные журналы. Краевым отделом народного образования были выделены средства для оплаты работы преподавателей.

По сложившейся традиции преподавателями в ЛФМШ работают высококвалифицированные преподаватели и научные сотрудники Кубанского и Московского университетов (в ЛФМШ-88 было 4 доктора и 15 кандидатов наук), приглашаются специалисты из Киева, Казани, Новосибирска, Томска, имеющие большой опыт работы с одаренными детьми. Среди преподавателей ЛФМШ нет людей, работа которых в летней школе ограничивалась бы чтением лекций. Школьники имеют возможность общаться с преподавателями во время отдыха, спортивных состязаний и общешкольных мероприятий, в подготовке которых взрослые участвуют наравне с ребятами.

В 1988 г. электронную технику обслуживала группа московских школьников, занимавшихся в кружках Института проблем информатики АН СССР, в ЛФМШ-89 — студенты Кубанского университета, выпускники первых летних школ. Ребята не только помогали преподавателям в проведении занятий по информатике, но и активно участвовали в общественной жизни школы, чем заслужили особые симпатии школьников.

Важной представляется проблема установления контактов между летними профильными школами в нашей стране и зарубежными школами. В кубанских школах за последние годы побывали учащиеся из различных городов СССР: Волгограда, Казани, Киева, Москвы, Томска. В ЛФМШ-88, наряду с приглашенными школьниками из ряда городов страны, были участники из Великобритании, которые также с большим интересом включились в необычный учебный процесс. Целесообразно в будущем расширять связи ЛФМШ с подобными школами в других странах и производить обмен школьниками.

Выход ЛФМШ на международный уровень ставит ряд новых проблем: языкового барьера, бытовых условий, культуры общения. И это поняли как организаторы ЛФМШ, так и учащиеся, которые разъезжались с намерением усердно заниматься любимым предметом и изучать английский язык. Перевод ЛФМШ на более высокий уровень, когда, например, наряду со способными кубанскими школьниками в нее могут приглашаться победители и призеры олимпиад со всего Союза и зарубежные учащиеся из физико-математических школ, потребует от оргкомитета поиска более совершенных форм работы. Ясно одно — необходимо предоставить талантливым ребятам возможность общения с учеными и друг с другом. И ЛФМШ — одна из таких прекрасных возможностей.

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ СТРАНИЦА

Числовые курьезы

Интересен такой вопрос: существуют ли натуральные числа, которые при уменьшении каждой цифры на 1 уменьшаются в целое число раз?

Естественно потребовать, чтобы данное число не содержало нулей (т. е. чтобы цифры можно было уменьшать на 1). Тогда, разумеется, в полученном числе не будет цифры 9.

В символическом виде задача выглядит следующим образом: требуется решить уравнение вида

$$\frac{\overline{a_n...a_1}}{\overline{(a_n-1)...(a_1-1)}}=k,$$

где k — натуральное число, $1\leqslant a_i\leqslant 9$ $(i=1, 2, ..., n)$.

Числитель легко преобразуется к виду

$$\overline{a_n...a_1}=k\cdot\frac{\overline{\underbrace{1...1}_{n}}}{k-1},$$

откуда следует, что

$$\overline{(a_n-1)...(a_1-1)}=\frac{\overline{\underbrace{1...1}_{n}}}{k-1}.$$

Задача, таким образом, свелась к нахождению таких натуральных k, при которых число $\frac{\overline{1...1}}{k-1}$ является натуральным, не содержащим цифры 9.

Так как число $\overline{1...1}$ нечетное, то его делители — только нечетные числа, а следовательно, задача не имеет решений при нечетных k.

Итак, k может быть только четным. Среди четных чисел k нас не устраивают прежде всего такие, при которых $(k-1)$ кратно 5 (так как $\overline{1...1}$ не делится на 5). Такими являются $k=6$, 16, 26, ..., т. е. $k\neq 10l+6$ $(l=0, 1, 2, ...)$. Не являются решениями и такие $(k-1)$, которые делятся на 10, в противном случае $a_1=0$, что невозможно, т. е. $k\neq 10m+1$ $(m=1, 2, ...)$. Кроме того, при некоторых k число $\frac{\overline{1...1}}{k-1}$ может содержать цифру 9, что невозможно по условию задачи. Так произойдет, например, при $k=18$, 22, 24, 28, 32, 44, 48, 52, 54, 58, 62, 64, 68, 72, 82, 84, 88, 94, 98, ...

Однако оговоримся сразу: решение конечно же удобнее искать не перебором по k, а путем разложения на множители числа $\overline{\underbrace{1...1}_{n}}$, хотя эта задача сложная и в общем случае, видимо, трудно разрешимая.

Учитывая, что $11=1\cdot 11$, предположим, что: а) $k=2$, б) $k=12$. В случае а

$$\overline{(a_n-1)...(a_1-1)}=\frac{\overline{1...1}}{2-1}=\overline{1...1}$$

и мы получаем первое решение: $\frac{\overline{22...2}}{\overline{11...1}}=2$ — единственное, если предположить, что числа, получаемые из делимого уменьшением цифр на 1, не начинаются с нуля. В случае б

$$\overline{(a_n-1)...(a_1-1)}=\frac{\overline{\underbrace{1...1}_{n}}}{11}=\overline{101...01}$$

Если n четное, имеем:

$$\frac{\overline{1212...12}}{\overline{101...01}}=12.$$