

5. PŘÍKLADY ŘEŠENÍ ÚLOH TURNAJE MLADÝCH FYZIKŮ

Následující řešení úloh byla realizována podle obecného schématu postupu řešení. Řešení problému tak spočívá v následujících hlavních bodech:

1. rozbor — model; resp. provedení zadaného experimentu;
2. pracovní hypotéza;
3. ověření — teoretické řešení, experimenty;
4. dokumentace;
5. dosažené výsledky;
6. diskuse;
7. závěr.

Předložená řešení ukazují, jak je nutné naprosto přesně dodržet „pokyn“ k postupu řešení schovaný v názvu úlohy.

(1) Název: Pohyb draka

Ročník: 16.; 2002 – 2003

Č. úlohy: 1

Text: Za větrných dní lze pozorovat draky ve větru. Často se draci, držení jedním lanem, pohybují po stabilní trajektorii, která vypadá jako číslice 8. Proč se tak drak pohybuje? Existují jiné stabilní trajektorie?

1. Rozbor — model

Stabilní trajektorii se pravděpodobně myslí trajektorie ve tvaru uzavřené křivky, pokud možno jednoduché, a která je stabilním řešením pohybových rovnic.

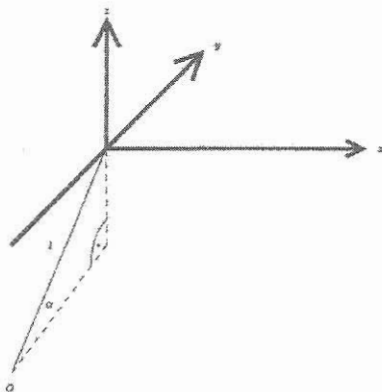
Pohyb draka lze chápat jako složený pohyb v osách x , y a z . Na draka působí síla větru, kterou můžeme považovat za konstantní. Drak se tedy nachází v jisté poloze. Je uchycen na laně délky l , které držíme silou F . Ze zkušenosti víme, že držíme-li draka, síla F se prakticky nemění.

Nyní vychýlíme draka z „rovnovážné“ polohy. To může způsobit např. porыв větru, nebo nepravidelnosti v síle, kterou působí vítr na draka. Drak se tedy vychýlí z původní polohy.

Drak se „lehce“ vychýlí, velikost síly F je však stále konstantní. Změní se ale její směr. Složka síly F působící ve směru vychýlení se zvětší. Protože působí proti síle větru, která je konstantní, začne drak kmitat kolem rovnovážné polohy.

Jak ukážeme, poměr frekvencí v jednotlivých osách nezávisí na F , l , ani na hmotnosti draka m , pouze na úhlu (α) mezi lanem a zemí. Pro jednoduchost bereme, že je lano napnuté, tj. že se neprohýbá.

Nyní rozebereme pohyb podle jednotlivých os podrobněji. Draka umístíme do počátku, konec lana držíme v bodě O o souřadnicích $[0; -l \cos \alpha; -l \sin \alpha]$ (viz Obr. 1-1).



Obrázek 1-1: Zvolená souřadnicová soustava.

2. Pracovní hypotéza

Po stabilní trajektorii se pohybuje drak díky periodickému pohybu v jednotlivých osách.

3. Teoretické řešení

a) Pohyb v ose x

Jak plyne z obr. 1-2, síla, která na draka působí v ose x , působí proti výchylce draka x a její složka v této ose je tudíž $-F \sin \beta$. Pohybová rovnice proto zní

$$-F \sin \beta = m\ddot{x}, \quad (1.1)$$

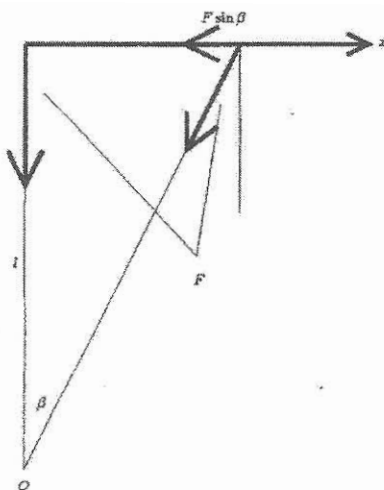
kde $\sin \beta = \frac{x}{\sqrt{l^2+x^2}}$, což rozepíšeme podle Taylorova rozvoje a dostaneme

$\sin \beta = \frac{x}{l} \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{x}{l})^2}} = \frac{x}{l} + O\left(\left(\frac{x}{l}\right)^3\right)$. Po zanedbání členů řádu $\left(\frac{x}{l}\right)^3$ a vyšších rovnice (1.1) přejde v

$$-F \frac{x}{l} = m\ddot{x}, \text{ čili } \ddot{x} + \omega_x^2 x = 0, \text{ kde } \omega_x = \sqrt{\frac{F}{lm}}.$$

Získali jsme frekvenci kmitů draka kolem bodu O v ose x .

* $O(x^n)$ značí členy řádu n a vyšších.



Obrázek 1-2: Pohyb v ose x .

b) Pohyb v ose y

Pohyb v ose y je trochu komplikovanější, jelikož v ní působí více sil. $F \cos \alpha$ je složka síly F v ose y , jak plyne z obr. 1-3. To je síla, kterou působí vítr na draka a je kompenzována tím, že držíme lano v ruce. Po vychýlení se složka síly F v ose y změní na $F \cos \beta$, jak plyne z obrázku. Rozdíl mezi složkou síly větru v ose y , která je vykompenzována silou držení lana, a skutečnou složkou síly větru v ose y je $F \cos \alpha - F \cos \beta$, což je tedy výslednice v ose y . Potom pohybová rovnice je ve tvaru

$$F \cos \alpha - F \cos \beta = m\ddot{y} \quad (1.2)$$

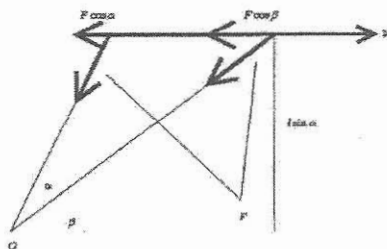
a $y = l \sin \alpha \left(\frac{1}{\tan \beta} - \frac{1}{\tan \alpha} \right)$, odtud po zavedení substituce $\varepsilon = \frac{y}{l}$ dostáváme $\tan \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha + \varepsilon}$, takže pomocí Taylorova rozvoje vyjádříme

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}} = \frac{\cos \alpha + \varepsilon}{\sqrt{1 + 2\varepsilon \cos 2\alpha + \varepsilon^2}} = (\cos \alpha + \varepsilon)(1 - \varepsilon \cos \alpha + O(\varepsilon^2)) = \\ &= \cos \alpha - \varepsilon \cos^2 \alpha + \varepsilon + O(\varepsilon^2) = \cos \alpha + \varepsilon \sin^2 \alpha + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

a po zanedbání členů řádu ε^2 a vyšších dosadíme do (1.2) $-F\varepsilon \sin^2 \alpha = m\ddot{y}$, čili $\ddot{y} + \omega_y^2 y = 0$,

kde $\omega_y = \sqrt{\frac{F}{m}} \sin \alpha$.

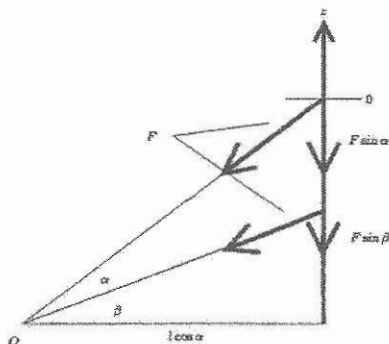
Získali jsme frekvenci kmitů draka v ose y . Vidíme, že závisí také na úhlu α .



Obrázek 1-3: Pohyb v ose y.

c) Pohyb v ose z

Pohyb v ose z je podobný předešlému případu. $F \sin \alpha$ je složka síly F v ose z, jak plyne z obr. 1-4.



Obrázek 1-4: Pohyb v ose z.

To je vztahová síla vzduchu mínus tíhová síla a je kompenzována tím, že držíme lano v ruce. Po vychýlení se složka síly F v ose z změní na $F \sin \beta$, jak plyne z obrázku. Potom pohybová rovnice je ve tvaru

$$F \sin \alpha - F \sin \beta = m\ddot{z}, \quad (1.3)$$

a $z = l \cos \alpha (\tan \beta - \tan \alpha)$, odtud po zavedení $\varepsilon = \frac{z}{l}$ dostáváme $\tan \beta = \frac{\sin \alpha + \varepsilon}{\cos \alpha}$, takže pomocí Taylorova rozvoje vyjádříme

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \frac{\tan \beta}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}} = \frac{\sin \alpha + \varepsilon}{\sqrt{1 + 2\varepsilon \sin \alpha + \varepsilon^2}} = (\sin \alpha + \varepsilon) (1 - \varepsilon \sin \alpha + O(\varepsilon^2)) = \\ &= \sin \alpha - \varepsilon \sin^2 \alpha + \varepsilon + O(\varepsilon^2) = \sin \alpha + \varepsilon \cos^2 \alpha + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

a po zanedbání členů řádu ε^2 a vyšších dosadíme do (1.3) $-F\varepsilon \cos^2 \alpha = m\ddot{z}$, čili $\ddot{z} + \omega_z^2 z = 0$,

kde $\omega_z = \sqrt{\frac{F}{m}} \cos \alpha$.

Získali jsme frekvenci kmitů draka v ose z. Stejně jako v ose y závisí na úhlu α .

4. Dosažené výsledky

Frekvence kmitů v jednotlivých osách je:

$$\omega_x = \sqrt{\frac{F}{lm}}, \quad (1.4)$$

$$\omega_y = \omega_x \sin \alpha, \quad (1.5)$$

$$\omega_z = \omega_x \cos \alpha. \quad (1.6)$$

Tudíž vždy platí $\omega_x^2 = \omega_y^2 + \omega_z^2$.

Drak bude dělat osmičky, pokud bude poměr frekvencí 2:1. Z rovnice (1.5) je vidět, že osmičky nastávají při $\alpha = 30^\circ$ ($2\omega_y = \omega_x$) a při $\alpha = 60^\circ$ ($2\omega_z = \omega_x$). Konečně pro $\alpha = 45^\circ$ bude drak opisovat elipsu, popřípadě kružnici v průmětu do roviny yz , pokud se amplitudy kmitání draka v osách y a z budou rovnat a zároveň pro fázový posun těchto kmitání platí $|\varphi_y - \varphi_z| = \pi/2$, protože $\omega_y = \omega_z$.

Pro ostatní úhly α dostaneme známé Lissajousovy obrazce. Rovnice (1.4), (1.5) a (1.6) plně vystihují tvar výsledné trajektorie. Známe-li úhel α , jsme schopni dopočítat tvar křivky, kterou drak opisuje; užitím parametrických rovnic $x = A_x \sin(\omega_x t)$, $y = A_y \sin(\omega_y t)$, $z = A_z \sin(\omega_z t)$.

5. Diskuse

V uvedené teorii platí, že poměry frekvencí kmitů v jednotlivých osách závisí pouze na úhlu mezi lanem a zemí, tedy na tomto úhlu závisí, po jaké trajektorii se bude drak pohybovat. Pro určité úhly to bude osmička, v různých rovinách. Dále to může být elipsa. Z pohybových rovnic nevyplývá, jaké budou amplitudy kmitů. Ty určují výsledný tvar trajektorie, např. zploštění elipsy. Předložené řešení je stabilní pro všechny úhly α .

Jak známo, Lissajousovy obrazce tvoří uzavřenou křivku, pokud je poměr obou frekvencí racionální číslo, což je i tento případ.

Výše uvedené pohybové rovnice platí v přiblížení $\varepsilon^2 = \left(\frac{r}{l}\right)^2 \rightarrow 0$, které je velmi dobře splněno, protože x je v řádu maximálně metrů, zatímco l je v řádu desítek metrů, a tudíž jejich poměr umocněn na druhou je řádově 0,01 a tedy dává ve výsledku chybu řádově centimetrů.

Byla zanedbána celá řada faktorů: od nepravidelností v proudění vzduchu, přes idealizovaného draka, který tahá za provaz stále stejnou silou a navíc se provaz neprohýbá, až po určité zjednodušení v pohybových rovnicích. Přesto teorie vystihuje podstatu problému.

6. Závěr

Předložená teorie vysvětluje, proč se někdy drak pohybuje po trajektorii ve tvaru 8 a předpovídá i tvar jiných možných stabilních trajektorií. Hlavním parametrem určujícím výsledný tvar trajektorie je úhel mezi lanem a zemí. Největší problém je zde patrně nekonstantní proudění vzduchu, které nejsme schopni předpovídat a které způsobuje celou řadu nepříznivých jevů.

(2) Název: Bubliny na rozhraní

Ročník: 16.; 2002 – 2003

Č. úlohy: 5

Text: Některé kapaliny mohou být navršeny jedna na druhou tak, že mezi nimi vznikne ostré rozhraní. Jsou-li povrchová napětí roztoků rozdílná, může být pozorován zajímavý jev. Foukejte bubliny různých velikostí do spodní kapaliny a pozorujte jejich chování na rozhraní. Prozkoumejte a vysvětlete tento jev.

1. Experimentální aparatura

K sestavení odpovídající aparatury dostatečně posloužila kádinka o objemu 1 000 ml, několik gumových hadiček pro spoje potrubí vedení bubliny a skleněná kapátka a trubičky, coby různě velké otvory pro vytváření různě velikých bublin. Soustava hadiček a trubek byla upevněna v držáku umístěném na stojanu a to tak, aby otvor, kde bubliny vznikaly a následně odtud unikaly vzhůru, byl pokud možno uprostřed rozhraní (a potažmo i hladiny) a co nejdále od rušivých vlivů na rozhraní. Na takto sestavené aparatuře jsme mohli začít dělat pokusy.

2. Provedení experimentu

Abychom obdrželi ostré rozhraní mezi kapalinami, zvolili jsme jako spodní kapalinu vodu a jako horní kapalinu cyklohexan. Součin rozpustnosti je velice malý, a proto můžeme říci, že jde o nemísitelné kapaliny. Důvod, proč jsme zvolili cyklohexan namísto třeba obyčejného rostlinného oleje, je fakt, že jde o chemicky čistou látku a s tím souvisí také to, že v literatuře (snadno) dohledáme hodnoty potřebných veličin právě pro cyklohexan.

Samotný experiment probíhal ve své podstatě velmi jednoduše; do kádinky jsme nalili vodu, na ní opatrně (aby nedošlo ke zbytečnému mísení v emulsi) nalili cyklohexan. Protože vždy část cyklohexanu pronikla do vody, nechali jsme celý systém nějakou dobu odstát, aby se přinejmenším oddělily obě kapaliny. Poté jsme spustili „potrubní“ sestavu a injekční stříkačkou vytvářeli bubliny a tyto pak pozorovali na rozhraní.

3. Pracovní hypotéza

Bublina na rozhraní může projít nebo zůstat pod ním uchycená. To záleží jednak na velikosti bubliny a také na mezifázovém napětí daného rozhraní.