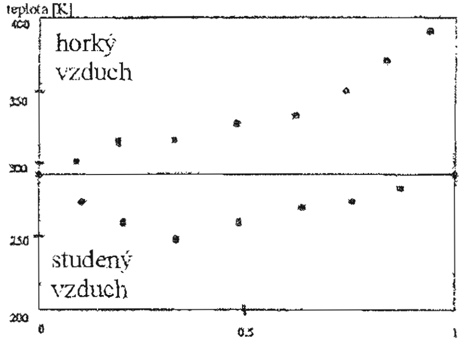
stavu víru vynuceného s jednotnou úhlovou rychlostí. Při přechodu mezi těmito stavy nastává přeměna části kinetické energie plynu na tepelnou. To způsobuje zvýšení teploty plynu ve větší vzdálenosti od osy.

4. Dosažené výsledky, diskuse

Umístění vstupu rovněž způsobuje vysoký tlak u stěn a naopak velmi nízký tlak plynu v oblasti osy. V této části trubice plyn expanduje, což způsobuje snížení jeho teploty.



Hmotnostní poměr studeného a horkého vzduchu

5. Závěr

1. Středovým otvorem uniká vzduch z oblasti osy — studený.
2. Otvorem kolem škrtícího kohoutku uniká vzduch z blízkosti stěn — horký.

(9) Název: Elektrické kyvadlo

Ročník: 17.; 2003 – 2004

Č. úlohy: 3

Text: Užijte vlákna k zavěšení kuličky mezi desky kondensátoru. Když jsou desky nabity, kulička začne oscilovat. Na čem závisí perioda těchto oscilací?

1. Experiment — interpretace

Kulička je z vodivého materiálu. Na deskách kondensátoru se shromažďuje elektrický náboj. Proto se kulička při prvotním nárazu na desku kondensátoru nabije s touto deskou souhlasně. Pak je ale od této desky odpuzována a zároveň přitahována druhou deskou, do které vzápětí narazí. Tato deska má opačný náboj než první deska, a tím i kulička. To umožní kuličce se nejen vybít, ale i nabít nábojem souhlasným s touto deskou. Opět je pak od této desky odpuzována a letí k první desce. Takto tedy vzniknou v našem případě oscilace.

2. Pracovní hypotéza

Základní myšlenka celého řešení problému je založena na *rovnovážném stavu*. Kulička při nárazu do desky kondensátoru ztrácí energii. Dále také podléhá nenulovému odporu vzduchu.

Pokud není kondensátor nabit, pak tyto ztráty energie mezi jednotlivými nárazy kuličky do desek vedou k tomu, že frekvence oscilací klesá.

Když je však kondensátor nabit, je mezi deskami napětí. Při rovnovážném stavu toto napětí bude přesně kompenzovat ztráty energie popsané výše.

3. Řešení

a) Jaké síly na kuličku působí?

Gravitace

Vzhledem k tomu, že jsme kuličku umístili mezi desky doprostřed, se potenciální energie gravitačního pole u obou desek neliší, rozdíl gravitačního potenciálu mezi nimi je nulový. Proto nebude mít gravitace na rovnovážnou rychlost před odrazem vliv. Způsobí ale, že kulička bude let mezi deskami absolvovat rychleji, než kdyby byla pouze pod vlivem elektrické síly mezi deskami kondensátoru. Čili gravitace neovlivní velikost rovnovážné rychlosti, ale po jejím získání ovlivní výpočet stření rychlosti letu mezi deskami kondensátoru, a tím i výslednou frekvenci.

Při našem experimentu je většinou vzdálenost desek podstatně menší než délka vlákna, na němž je kulička zavěšena. Jinak by oscilace vůbec neprobíhaly. Z toho vyplývá, že záleží na poměru vzdálenosti desek a délky vlákna, tedy za této podmínky $d << l$, nebo-li také $\varphi << \pi/2$, kde φ značí odklon vlákna od svislého směru, lze gravitační pole mezi deskami aproximovat následovně: označme vzdálenost kuličky od osy půlící vzdálenost mezi deskami jako x. Pak složka gravitační síly působící ve směru osy x, když druhá složka rozkladu je ve směru shodném s vláknem a tudíž ji lze vyrušit s jeho reakcí, je $mg \tan \varphi$. Využitím $\sin \varphi \approx \tan \varphi \approx \varphi$ a $\sin \varphi = x/l$ dostáváme

$$F_{Gx} \approx mg\frac{x}{l} \tag{9.1}$$

Elektrické pole kondensátoru

Pro toto pole platí následující elementární vztah

$$E = \frac{U}{d} \tag{9.2}$$

kde U je napětí mezi deskami kondensátoru a d je vzdálenost mezi nimi. Pole je přibližně homogenní, pokud jsou rozměry desek kondensátoru významně větší než vzdálenost mezi nimi a pokud neuvažujeme oblasti na okrajích desek. Také můžeme říci, že nese-li kulička náboj q, pak je pro ni rozdíl potenciálních energií mezi oběma deskami

$$\Delta E_P = qU \tag{9.3}$$

b) Rovnovážná rychlost před odrazem

Zmínili jsme se o tom, že kulička při nárazu na desku kondenzátoru ztrácí část své kinetické energie, potažmo hybnosti. Míru této ztráty vyjadřuje tzv. *koeficient restituce* následovně: $v_2 = kv_1$, kde v_1 je rychlost kuličky před nárazem, v_2 rychlost po nárazu a k je koeficient restituce. Přitom $0 < k < 1$.

Má-li dojít k rovnovážnému stavu, je energie dodaná kuličce elektrickým polem rovna rozdílu kinetických energií před nárazem a po nárazu. Zapsání této podmínky vede k následujícímu vztahu:

$$\Delta E_K = \Delta E_P$$

$$\frac{1}{2}m\left(v_1^2 - v_2^2\right) = \frac{1}{2}m\left(1-k^2\right)v_1^2 = qU \tag{9.4}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2qU}{m\left(1-k^2\right)}} \tag{9.5}$$

Jak však stanovit náboj q přenesený na kuličku? Vyjdeme z toho, že se nabije na stejný potenciál, jako má deska, které se dotkne. Potenciál nabité vodivé koule je $\varphi = q/(4\pi\varepsilon_0 r)$, kde r je poloměr kuličky, potenciál desky je $U/2$. Proto

$$\frac{U}{2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$q = 2\pi\varepsilon_0 rU \tag{9.6}$$

Dosazením (9.6) do (9.5) dostaneme

$$v_1 = \sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_0 r}{m\left(1-k^2\right)}}U \tag{9.7}$$

Dále můžeme tuto rovnici upravit, když rozepíšeme hmotnost kuličky jako $m = (4/3)\rho_K \pi r^3$:

$$v_1 = \sqrt{\frac{3\varepsilon_0}{\rho_K\left(1-k^2\right)}}\frac{U}{r} \tag{9.8}$$

Rychlost po srážce je pak

$$v_2 = k\sqrt{\frac{3\varepsilon_0}{\rho_K\left(1-k^2\right)}}\frac{U}{r} \tag{9.9}$$

c) Doba letu mezi deskami

Připomeňme znovu, že výsledky (9.8) a (9.9) platí pro jakkoliv velké gravitační pole, nebo obecně pro jakékoliv pole (přidané k elektrické síle), jehož potenciál je u obou desek stejný. Nyní použijeme zakomponování gravitace do celého jevu k získání doby letu mezi deskami. Použijeme-li aproximaci (9.1), pak rovnice pohybu ve směru osy x zní

$$m\ddot{x} = -mg\frac{g}{l} + qE \tag{9.10}$$

$$\ddot{x} = -\underbrace{\frac{g}{l}}_{\omega_0^2}\left(x - \underbrace{\frac{qEl}{mg}}_{x_0}\right) \qquad \Big| s = x - x_0,\ \dot{s} = \dot{x},\ \ddot{s} = \ddot{x} \tag{9.11}$$

$$\ddot{s} = -\omega_0^2 s \qquad \Bigg| \quad \frac{\mathrm{d}\left(\dot{s}^2\right)}{\mathrm{d}t} = 2\ddot{s}\dot{s} \tag{9.12}$$

$$\dot{s}^2 = -\omega_0^2 s^2 + C \tag{9.13}$$

Integrační konstantu C určíme z podmínky v čase $t = 0$:

$$\dot{s}(0) = v_2 \tag{9.14}$$

$$s(0) = s_0 = x(0) - x_0 = -d/2 + r - x_0 \tag{9.15}$$

Z toho plyne

$$C = \omega_0^2 s_0^2 + v_2^2 \tag{9.16}$$

Po dosazení (9.16) do (9.13) získáme

$$\dot{s} = \sqrt{\omega_0^2 s_0^2 + v_2^2 - \omega_0^2 s^2} = \omega_0^2 \underbrace{\sqrt{s_0^2 + \frac{v_2^2}{\omega_0^2}} - s^2}_{\int_{s_0}^{s_1} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{p^2 - s^2}} = \omega_0 T'} \sqrt{p^2 - s^2} \tag{9.17}$$

$$T' = \frac{1}{\omega_0}\left[\arcsin\left(\frac{s_1}{p}\right) - \arcsin\left(\frac{s_0}{p}\right)\right]$$

$$T' = \frac{1}{\omega_0}\left[\arcsin\left(\frac{s_1}{\sqrt{s_0^2 + \frac{v_2^2}{\omega_0^2}}}\right) - \arcsin\left(\frac{s_0}{\sqrt{s_0^2 + \frac{v_2^2}{\omega_0^2}}}\right)\right] \tag{9.18}$$

Frekvenci oscilací pak již snadno spočítáme jako

$$f = \frac{1}{2T'}\,. \tag{9.19}$$

d) *Jiný případ*

Nyní předpokládejme, že je kulička nabitá nábojem q. Pokud zvolíme počátek polárních souřadnic v místě závěsu, pak $\mathbf{F}_G = -mg\sin\varphi\mathbf{e}_\varphi + mg\cos\varphi\mathbf{e}_r$, $\mathbf{E} = -E\cos\varphi\mathbf{e}_\varphi + E\sin\varphi\mathbf{e}_r$. Vyjdeme ze základní rovnice rotační mechaniky:

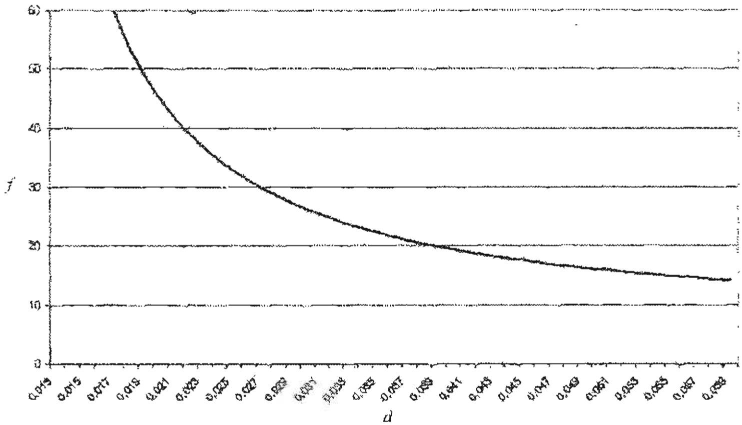
$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi - El\cos\varphi\ , \tag{9.20}$$

což po úpravě dává

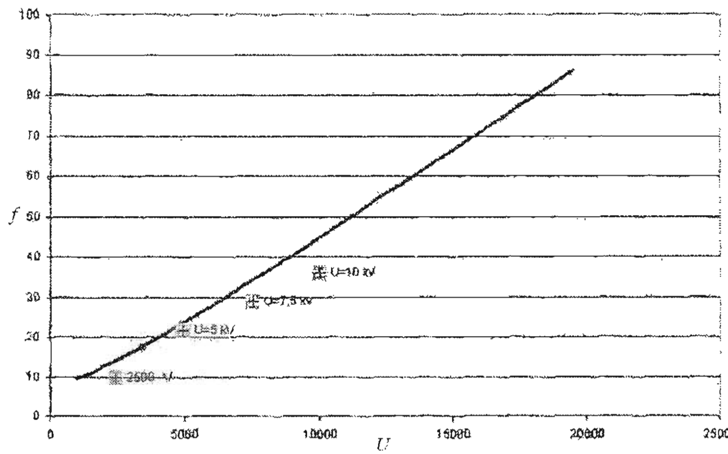
$$\ddot{\theta} = -\omega_0\left(\sqrt{1+\varepsilon^2}\right)\sin\theta \tag{9.21}$$

kde $\theta = \varphi - \delta$, $\delta = \mathrm{arctg}((qE)/(mg))$, $\varepsilon = \mathrm{tg}\ \delta$, $\omega_0 = \sqrt{(l/g)}$. Pro malé úhly θ to však je rovnice harmonického kmitání okolo rovnovážné polohy dané úhlem δ. Všimněme si, že tento výsledek je konsistentní s výrazem pro x_0 (9.11), když uvážíme, že $x_0 = l\ \mathrm{tg}\ \delta = (qEl)/(mg)$. Dále je pozoruhodné, že se frekvence oscilací zvýší násobkem $(1 + \varepsilon^2)$, což při velkém elektrickém poli poukazuje na lineární závislost této frekvence na intenzitě pole.

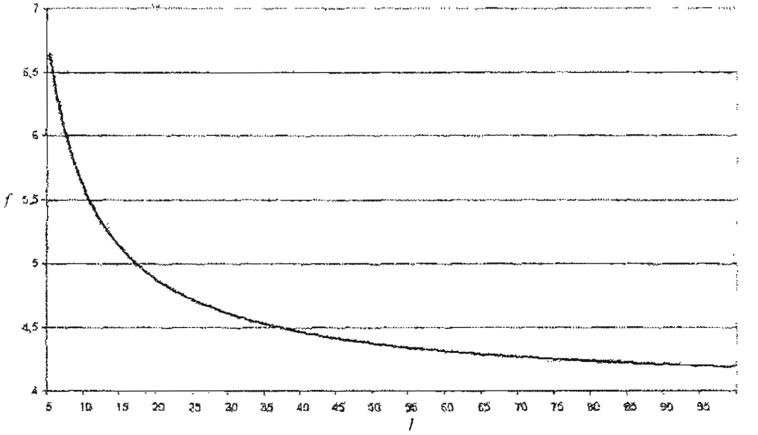
4. Dosažené výsledky



Obrázek 9-1: Graf závislosti frekvence na vzdálenosti desek.



Obrázek 9-2: Graf závislosti frekvence na napětí; teorie (křivka) i experiment (body).



Obrázek 9-3: Graf závislosti frekvence na délce vlákna (vzdálenost desek d = 5 cm, napětí U = 10 kV).

5. Diskuse

Ukázali jsme, že rychlosti před nárazem a po odrazu od desky nezávisí na délce vlákna ani gravitačním zrychlení. Tyto rychlosti jsme vypočítali, což nám umožnilo provést úvahu pro frekvenci oscilací v případě, kdy lze z jevu vyloučit gravitaci, tedy když jsou desky dostatečně blízko u sebe, neboli $d/l \ll 1$. V takových případech závisí frekvence oscilací přímo úměrně na napětí a nepřímo úměrně na vzdálenosti desek. Nakonec pro malé hodnoty koeficientu restituce je na něm frekvence závislá opět přímo úměrně.

Provedli jsme také úvahu bez zanedbání gravitace (tedy pro větší vzdálenost desek). To vedlo po aproximaci gravitační síly na řešení diferenciální rovnice harmonického kmitání. Získali jsme analytický, přesto „nečitelný" výraz, který bylo proto nutné znázornit grafy jednotlivých závislostí. Přímá úměrnost frekvence na napětí zde již neplatila přesně, přesto však stále v přijatelném přiblížení. Závislost na vzdálenosti desek je zde opět dána křivkou charakteru hyperboly.

6. Závěr

Perioda oscilací kuličky mezi deskami kondensátoru závisí na napětí (přímo úměrně) a vzdálenosti (nepřímo úměrně) mezi deskami.