

výpočtu, kompenzujícím faktorem je však prakticky nezanedbatelný odvod tepla do okolí a tedy menší změna teploty, než je uvedena ve výpočtu.

Pro změnu maximálního přesycení přibližně platí

$$\Delta c_{\max} = \frac{c_1 - c_2}{\Delta t_c} \cdot \Delta t \quad (12.7)$$

$$\Delta t = \frac{Q}{cm}, \quad (12.8)$$

kde Δc_{\max} je změna koncentrace roztoku, $c_1 - c_2$ je změna rozpustnosti roztoku na rozdíl teplot Δt_c , Q teplo uvolněné krystalizací, c měrná tepelná kapacita roztoku a m hmotnost kapky (viz výše). Po dosažení příslušných hodnot docházíme k závěru, že na „zastavení krystalizace“ je třeba uvolnění tepla cca 6,440 J, tedy dojde k jednomu zastavení krystalizace, a na kapce by měly být pozorovatelné dva soustředěné kroužky. Zbytek tepla bude pravděpodobně odveden do okolí (při praktické realizaci experimentu zcela jistě; část tepla se uvolní při heterogenní nukleaci, kterou nevyloučíme).

6. Závěr

Dva kroužky byly pozorovány, a tedy teoretický výpočet velmi složitého jevu, který nelze řešit standardními metodami byl vyřešen v naprosté shodě s provedenými experimenty.

(13) Název: Seebeckův jev

Ročník: 17.; 2003 – 2004

Č. úlohy: 6

Text: Dva dlouhé kovové proužky jsou ohnuty do oblouku a spojeny na obou koncích. Poté jeden konec zahřejeme. Jaké jsou podmínky, při kterých vykazuje magnetická střelka umístěná mezi proužky největší výchylku?

1. Rozbor — model

Problém spočívá ve zjištění závislosti výchylky střelky na hodnotách parametrů:

1. rozměry pásků
2. použitý materiál
3. teplotní rozdíl spojů
4. kvalita spojů

2. Pracovní hypotéza

Výchylka střelky je dána poměrem intenzit magnetických polí \mathbf{B} obvodu a \mathbf{B}_0 okolního prostřední. \mathbf{B} zjistíme z elektrického proudu pomocí Biotova-Savartova zákona. Ten také

zohledňuje velikost aparatury jako parametr. Proud je určen elektrickým odporem a napětím, které je dané Seebeckovým zákonem.

3. Teoretické řešení

a) Seebeckův jev

Závislost napětí na použitím materiálu a teplotách spojů je dána vztahem

$$U = \Delta\alpha\Delta T + \frac{1}{2}\Delta\beta(\Delta T)^2, \quad (13.1)$$

kde $\Delta\alpha$ a $\Delta\beta$ jsou rozdíly prvních a druhých Seebeckových koeficientů pro zvolené materiály (jsou to materiálové konstanty) a ΔT je rozdíl teplot obou spojů.

b) Proud v aparatuře

Proud v aparatuře závisí kromě již uvedeného napětí také na odporu materiálů. Odpor je závislý na teplotě. Celkově je závislost odporu na teplotě výrazně menší, než závislost napětí na teplotě. Odpor je dán vztahem

$$R = \rho(T) \frac{l}{d\delta}, \quad (13.2)$$

což po dosazení lineární závislosti rezistivity ρ na teplotě dává

$$R = \frac{\rho_0 l}{d\delta} \left[1 + \frac{1}{2}(T_1 + T_2) - \alpha_\rho T_0 \right], \quad (13.3)$$

kde l je délka a d, δ jsou řezové rozměry pásku, ρ_0 je rezistivita při teplotě T_0 a α_ρ je součinitel teplotní závislosti odporu. Tento vztah vyjadřuje odpor pouze jednoho pásku. Do celkového odporu je nutno zahrnout také kontaktní odpor R_c mezi pásky.

Po dosazení (13.1) a (13.3) do Ohmova zákona dostaneme pro proud vztah

$$I = \frac{(\alpha_A - \alpha_B)(T_2 - T_1) + \frac{1}{2}(\beta_A - \beta_B)(T_2 - T_1)^2}{\frac{l}{d\delta} \left\{ \frac{1}{2}(T_2 + T_1) - T_0 \left[(\rho_{0A} \alpha_{\rho A} + \rho_{0B} \alpha_{\rho B}) + (\rho_{0A} + \rho_{0B}) \right] \right\} + 2R_c}. \quad (13.4)$$

c) Magnetické pole aparatury

Magnetické pole aparatury je dáno Biotovým-Savartovým zákonem:

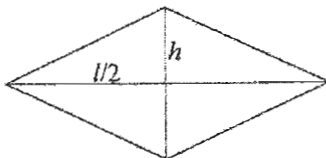
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}^0}{r^2} dV, \quad (13.5)$$

který po úpravě pro tenký vodič (v aproximaci i pro ploché kovové pásky) v rovině dostává podobu

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}^0}{r^2}. \quad (13.6)$$

Nyní zavedeme vektor $\mathbf{k} = \frac{\mathbf{B}}{I}$, který bude závislý pouze na rozměru aparatury, nikoli na tekoucím proudu. Pro zjednodušení výpočtu nyní budeme aproximovat oblouk jako lomenou

čáru; (viz obr. 13-1). Pro takovouto lomenou čáru už není problém vyjádřit hodnotu parametru k . Nejprve je nutné vyjádřit úhel svíraný oběma vektory v (13.6), a poté vyřešit výsledný integrál (řešení jsme našli v matematických příručkách).



Obrázek 13-1: Aproximace oblouku pro zjištění k .

Řešení:

$$k = \frac{\mu_0}{\pi h \sqrt{1 + \frac{h^2}{l_2^2}}} \left[\frac{l_2 - h}{\sqrt{l_2^2 - 2hl_2 + h^2 \left(2 + \frac{h^2}{l_2^2}\right)} + \sqrt{2 + \frac{h^2}{l_2^2}}} \right] \quad (13.7)$$

d) *Výchylka střelky*

Výchylka střelky je dána úhlem Δ svíraným vektorem \mathbf{B}_0 a vektorem $\mathbf{B}_c = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}$. Kromě velikostí těchto dvou polí je Δ závislý také na počátečním úhlu mezi vektory \mathbf{B}_0 a \mathbf{B} , který označíme θ . Položíme-li oblouky ve směru osy x , bude rozklad vektorů do kartézské soustavy vypadat následovně:

$$B_x = 0 \quad (13.8)$$

$$B_y = |\mathbf{B}| \quad (13.9)$$

$$B_{x0} = |\mathbf{B}_0| \sin \theta \quad (13.10)$$

$$B_{y0} = |\mathbf{B}_0| \cos \theta \quad (13.11)$$

$$B_{xc} = B_x + B_{x0} = |\mathbf{B}_0| \sin \theta \quad (13.12)$$

$$B_{yc} = B_y + B_{y0} = |\mathbf{B}| + |\mathbf{B}_0| \cos \theta \quad (13.13)$$

Dále platí:

$$\tan(\theta - \Delta) = \frac{B_{xc}}{B_{yc}} \quad (13.14)$$

$$\Delta = \theta - \arctan \frac{|\mathbf{B}_0| \sin \theta}{|\mathbf{B}| + |\mathbf{B}_0| \cos \theta} \quad (13.15)$$

e) *Maximalizace výchylky*

Ke zvýšení výchylky mohou přispět následující faktory:

1. $U - T$ — pro většinu článků se s rostoucím teplotním rozdílem napětí neustále zvyšuje, pro námi používaný článek je však maximálního napětí dosaženo při $\Delta T = 372$ K.
2. $R - T$ — předpokládali jsme, že odpor se s teplotou lineárně zvyšuje, čímž se výchylka zmenšuje. Zvyšování odporu však není zdaleka tak významné jako zvyšování napětí, tuto závislost je tedy možno zanedbat.
3. $R - l$ — pro minimalizaci odporu je vhodné minimalizovat délku oblouků, neboť s rostoucí délkou se lineárně zvyšuje také odpor systému. Při přílišné minimalizaci délky však narážíme na technické problémy spojené s vytvářením teplotního rozdílu.
4. $R - d, \delta$ — na šířce a tloušťce závisí odpor nepřímo a výsledný efekt tudíž přímo, je tedy vhodné volit širší a silnější plechy. Mohou ovšem nastat technické komplikace při spojování plechů.
5. Počáteční poloha stěelky — na počáteční poloze stěelky závisí výchylka velice zásadně. Je-li $|\mathbf{B}| > |\mathbf{B}_0|$, pak je nejvýhodnější nastavit aparaturu tak, aby obě pole směřovala proti sobě (při interakci bude výsledné pole \mathbf{B}_e , směřovat na opačnou stranu, než po \mathbf{B}_0 , což zajistí maximální výchylku). V opačném případě je nutné maximální výchylku určit nalezením maxima Δ v závislosti na θ pomocí zjištění první a druhé derivace závislosti Δ na θ . Ze vztahů pro maxima vyplývá, že platí

$$\cos \theta = -\frac{B}{B_0}, \quad (13.16)$$

$$\sin \theta < 0. \quad (13.17)$$

Úhel θ tedy leží ve III. kvadrantu (podle znamének funkcí \sin a \cos).

4. Experiment — dosažené výsledky

Pro experimenty jsme používali nejnázve dostupný materiál — plechy ze železa a mědi o tloušťce 1 mm. Z nich jsme vyrobili pásy o šířce 5 a délce 30 cm, které jsme spájeli stříbrem (nemohli jsme použít cín, neboť při ohřevu na vařiči by se cín roztavil). Přes snahu o co nejlepší spojení plechů se nám nepodařilo snížit kontaktní odpor pod 1 m Ω . Provedli jsme více experimentů, které nám dávaly dobrou shodu s teorií. Pro ohřev jsme používali plynový vařič dávající teplotu 700 K, pro chlazení jsme použili vodu z vodovodu o teplotě 280 K. Pro počáteční úhel $\theta = 120^\circ$ jsme dostali výchylku $\Delta = 70^\circ$, přičemž podle teoretického odvození by měla být velikost výchylky rovna 72° , což je až překvapující shoda.

5. Závěr

Provedli jsme teoretické odvození závislosti výchylky střelky. Výsledky experimentů potvrdily teoretické závěry. Zjistili jsme také, které parametry mají zásadní vliv na velikost výchylky.

(14) Název: Žabky

Ročník: 17.; 2003 – 2004

Č. úlohy: 8

Text: Je možné hodit plochý oblázek takovým způsobem, že se může odrazet napříč vodní hladinou. Jaké podmínky musí být zajištěny, aby tento jev nastal?

1. Rozbor

Tato úloha je o velmi dobře známém ději, o házení žabek. Asi každý někdy v minulosti žabky házel, ale asi jen málokdo se již zamyslel, na jakých fyzikálních principech fungují. Pokud odmyslíme různé neideálnosti, jako zvlněnou hladinu, či foukající vítr, zůstane nám vcelku popsateľná soustava. Můžeme pak předpokládat, mezi kontakty oblázku s vodou trajektorii jako u obyčejného šikmého vrhu. Dle Reynoldsova čísla můžeme usoudit, který z odporových vzorců pro tekutiny použít pro samostatný kontakt. V našem případě nám vyjde, že mnohonásobně převládne vliv setrvačnosti molekul nad vlivem viskosity, tudíž můžeme s klidným svědomím použít Newtonův odporový vzorec.

Také nesmíme zapomenout na rotaci, která díky gyroskopickému efektu stabilizuje náklon hozeného oblázku. Ten potřebujeme stabilizovat, jelikož když se moc sníží, sníží se i mnohonásobně vztlaková síla, nebo dokonce kdyby se oblázek naklonil „dopředu“ zasekl by se jednoduše bez náznaku odskoku.

2. Pracovní hypotéza

Jak si asi každý sám v mládí ověřil, „hodit žabku“ opravdu lze. Lze použít oblázky různých tvarů a velikostí, přičemž se ukazuje, že čím více je oblázek plochý, tím snadněji se docílí kýženého skákání. Velikost se zdá být omezující pouze tím, že s většími (těžšími), oblázky se hůře hází. Oblázky je nutno rozrotovat při hodu, aby je jejich rotace stabilizovala při odrazech a nezapadly do vody při prvním či druhém kontaktu s vodou. Při experimentech lze povětšinou dosahovat 5-ti až 10-ti odrazů.