

5. Závěr

Provedli jsme teoretické odvození závislosti výchylky střelky. Výsledky experimentů potvrdily teoretické závěry. Zjistili jsme také, které parametry mají zásadní vliv na velikost výchylky.

(14) Název: Žabky

Ročník: 17.; 2003 – 2004

Č. úlohy: 8

Text: Je možné hodit plochý oblázek takovým způsobem, že se může odrazet napříč vodní hladinou. Jaké podmínky musí být zajištěny, aby tento jev nastal?

1. Rozbor

Tato úloha je o velmi dobře známém ději, o házení žabek. Asi každý někdy v minulosti žabky házel, ale asi jen málokdo se již zamyslel, na jakých fyzikálních principech fungují. Pokud odmyslíme různé neideálnosti, jako zvlněnou hladinu, či foukající vítr, zůstane nám vcelku popsateľná soustava. Můžeme pak předpokládat, mezi kontakty oblázku s vodou trajektorii jako u obyčejného šikmého vrhu. Dle Reynoldsova čísla můžeme usoudit, který z odporových vzorců pro tekutiny použít pro samostatný kontakt. V našem případě nám vyjde, že mnohonásobně převládne vliv setrvačnosti molekul nad vlivem viskozity, tudíž můžeme s klidným svědomím použít Newtonův odporový vzorec.

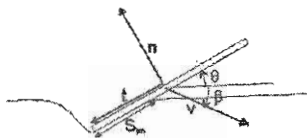
Také nesmíme zapomenout na rotaci, která díky gyroskopickému efektu stabilizuje náklon hozeného oblázku. Ten potřebujeme stabilizovat, jelikož když se moc sníží, sníží se i mnohonásobně vztaková síla, nebo dokonce kdyby se oblázek naklonil „dopředu“ zasekl by se jednoduše bez náznaku odskoku.

2. Pracovní hypotéza

Jak si asi každý sám v mládí ověřil, „hodit žabku“ opravdu lze. Lze použít oblázky různých tvarů a velikostí, přičemž se ukazuje, že čím více je oblázek plochý, tím snadněji se docílí kýženého skákání. Velikost se zdá být omezující pouze tím, že s většími (těžšími), oblázky se hůře hází. Oblázky je nutno rozrotovat při hodu, aby je jejich rotace stabilizovala při odrazech a nezapadly do vody při prvním či druhém kontaktu s vodou. Při experimentech lze povětšinou dosahovat 5-ti až 10-ti odrazů.

3. Teoretické řešení

a) Model



Obrázek 14-1: Nákres modelu

Model aproximuje oblázek jako disk se zanedbatelnou tloušťkou, který byl hozen s náklonem θ a počáteční rychlostí v_0 . Předpokládáme, že relevantní děje se odehrávají pouze při kontaktu oblázku s vodou, neuvažujeme interakci oblázku se vzduchem. Také předpokládáme, že náklon θ je v průběhu kolize s vodou konstantní díky rotaci oblázku.

Když se trochu více podíváme na kontakt oblázku s vodou, zjistíme, že Reynoldsovo číslo, definované jako $Re = va/\nu$, kde ν je kinetická viskozita vody ($\nu \sim 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ pro vodu) a a je specifický rozměr (pro oblázek uvažujeme 10 cm), je v řádu 10^5 . Při této velikosti Re se dá předpokládat odporová i vztlková síla kvadraticky závislá na okamžité rychlosti oblázku a lineárně na S_{im} , jelikož již nehrají velkou roli síly způsobené viskozitou, ale převládají síly způsobené setrvačností molekul vody. Z Newtonova vzorce pro obtékání těles tedy vyplyvá:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} C_i \rho_w v^2 S_{im} \mathbf{n} + \frac{1}{2} C_f \rho_w v^2 S_{im} \mathbf{t} \quad (14.1)$$

Předpokládáme, že největší vztlková síla bude působit, pokud je oblázek pouze částečně ponořen, jelikož bude na oblázek shora tlačit vzduch a zespoda voda. Pokud se tedy oblázek ponoří celý, předpokládáme prudký pokles koeficientu C_i , a to tak zásadní, že vztlková síla již s velkou pravděpodobností nebude schopna vyvážit tíhu oblázku. Rovnice (14.1) může selhat pro velmi nízké rychlosti oblázku, či velké přistávací úhly, kdy ale také dojde k velké destabilizaci oblázku, kvůli které již nebude schopen odrazit se. Omezíme se proto na velké počáteční rychlosti a menší náklony, aby bylo možné docílit co největší počet odrazů.

b) Pohybové rovnice při kolizi

V této kapitole se budeme zabývat pouze časovým úsekem, kdy je oblázek částečně ponořený. Jak již bylo řečeno, předpokládáme konstantní náklon θ (více je o tomto předpokladu řečeno v článku *d*). Počátek času, $t = 0$, si položíme do okamžiku, kdy se oblázek dotkne hladiny. Pak po dobu kontaktu s vodou platí:

$$m \frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{2} \rho_w v^2 S_{im} (C_i \sin \theta + C_f \cos \theta) \quad (14.2a)$$

$$m \frac{dv_z}{dt} = -mg + \frac{1}{2} \rho_w v^2 S_{im} (C_i \cos \theta + C_f \sin \theta) \quad (14.2b)$$

Rovnice (14.2) jsou nelineární díky členům v^2 a díky S_{im} , které závisí na z . Přesto jsme s malou aproximací schopni přiblížit se řešení těchto rovnic. Předpokládáme-li jen malou změnu velikosti rychlosti oblázku při jedné kolizi, můžeme stanovit $v^2 \approx v_{x0}^2 + v_{z0}^2 \approx v_{z0}^2$. Tato aproximace platí jen pro velké poměry $v_{x0} : v_{z0}$.

Dále také předpokládáme lineární závislost $S_{im} = -az/\sin \theta$, což velmi ulehčí výpočty (budeme zkoumat tento, ačkoliv nereálný případ, poskytnete nám ale dostatečné přiblížení k reálné situaci). S počátečními podmínkami $t = 0$ (dotek s vodou), $z = 0$ a $\dot{z}_0 = v_{z0} < 0$, je řešením rovnice (14.2b) toto:

$$z(t) = -\frac{g}{\omega_0^2} + \frac{g}{\omega_0^2} \cos \omega_0 t + \frac{v_{z0}}{\omega_0} \sin \omega_0 t, \quad (14.3)$$

$$\omega_0^2 = \frac{C\rho_w v_{x0}^2 a}{2m \sin \theta},$$

kde $C = C_l \cos \theta - C_f \sin \theta \approx C_l$. Z rovnice (14.3) jasně vyplývá, že maximální hloubka dosažená oblázkem při kolizi s vodou je

$$|z_{\max}| = \frac{g}{\omega_0^2} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0 v_{z0}}{g} \right)^2} \right]. \quad (14.4)$$

Jak bylo řečeno dříve, předpokládáme, že oblázek se odrazí pouze pokud nedosáhne stavu, kdy je celý ponořen. Jinými slovy pokud $|z_{\max}| < a \sin \theta$. Z čehož lze odvodit

$$v_{x0} \geq v_c = \frac{\sqrt{\frac{4mg}{C\rho_w a^2}}}{\sqrt{1 - \frac{2m \tan^2 \beta}{a^3 C\rho_w \sin \theta}}}, \quad (14.5)$$

kde úhel β je definován jako $\tan \beta = v_{z0}/v_{x0}$. Tímto jsme získali minimální velikost v_{x0} nutnou pro odskočení. Pro klasické hodnoty, $m = 0,1$ kg, $a = 0,1$ m, $C_l \approx C_f \approx 1$, $\rho_w = 1000$ kg.m⁻³ a $\theta \approx \beta \approx 10^\circ$ dostáváme kritickou rychlost $v_c \approx 0,71$ m.s⁻¹ ≈ 1 m.s⁻¹.

c) Ztráty energie

Doposud jsme analyzovali pouze vertikální pohyb oblázku. Z této analýzy vyplynula minimální rychlost nutná k odrazu oblázku. Tato rychlost reprezentuje minimální rychlost oblázku pro vyrovnání jeho tíhy vztlakovou silou. Ale jak z rovnic (14.2) vyplývá, část kinetické energie oblázek ztratí díky tření o vodu. Je možné odhadnout zmenšení v_x použitím rovnice (14.2a). Pokud vynásobíme obě její strany v_x a zintegrujeme přes čas kolize, dostaneme snížení kinetické energie v x -ovém směru jakožto vykonanou práci

$$W = \frac{1}{2} m v_{x_f}^2 - \frac{1}{2} m v_{x0}^2 = - \int_0^{t_c} F_x(t) v_x(t) dt, \quad (14.6)$$

kde v_{x0} a v_{x1} jsou x -ové složky rychlosti oblázku před a po kolizi, t_k je délka kolize a $F_x = \frac{1}{2} \bar{C} \rho_w v_x^2 S_{im}$ je x -ová složka reakční síly, kdy $\bar{C} = C_i \sin \theta + C_f \cos \theta$.

Hrubý odhad pravé strany rovnice (14.6) lze zapsat jako

$$\int_0^{t_k} F_x(t) v_x(t) dt \approx v_{x0} \int_0^{t_k} F_x(t) dt. \quad (14.7)$$

Nyní máme jednoduchou závislost $F_x(t) = \mu F_z(t)$, kde $\mu = \bar{C}/C$. Navíc můžeme předpokládat, že průměrná vertikální síla v průběhu kolize, $\langle F_z(t) \rangle = t_k^{-1} \int_0^{t_k} F_z(t) dt$, je blízká tíze oblázku, tedy mg . Tudíž pro x -ovou složku reakční síly platí $\langle F_x(t) \rangle = \mu mg$. Navíc délka kolize je přibližně $t_k \approx 2\pi/\omega_0$.

Takže po upravení rovnice (14.6) dostáváme

$$W = -\mu mg v_{x0} \frac{2\pi}{\omega_0} = -mg\ell, \quad (14.8)$$

$$\ell = v_{x0} \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{2m \sin \theta}{C \rho_w a}}, \quad (14.9)$$

kde ℓ je vzdálenost po ose x , kterou urazil oblázek při kolizi. Pokud je ztráta energie W větší než původní kinetická energie, oblázek se zákonitě zastaví, což má samozřejmě za následek jeho nenávratné potopení. Za použití rovnice (14.6) může být tato podmínka přepsána jako $\frac{1}{2} m v_{x0}^2 > \mu mg\ell$, což lze dále upravit do tvaru

$$v_{x0} > v_r = \sqrt{2\mu g\ell}. \quad (14.10)$$

Pokud použijeme stejné numerické hodnoty jako v minulém dosazení, dostaneme $\mu = 1,4$ a $\ell = 13$ cm, takže $v_r \approx 2$ m.s⁻¹. Toto kritérium je tedy více omezující, než předcházející rovnice (14.5). Proto stanovíme rovnici (14.10) jako kritérium pro odskočení oblázku od vodní hladiny.

d) Rotace oblázku

Pokud získá oblázek při kolizi s vodou rotaci kolem osy y , neboli $\theta \neq 0$, změní se θ během letu od kolize ke kolizi natolik, že již nebude mít velkou šanci znovu odskočit. Proto jej musí stabilizovat rotace (s úhlovou rychlostí $\dot{\phi}_0$) kolem jeho hlavní osy (ta prochází jeho hmotným středem a je rovnoběžná s vektorem \mathbf{n}). Tento efekt je znám pod názvem gyroskopický efekt. V průběhu kolize působí reakční síla jen na ponořenou část oblázku, a tím má nenulový moment síly. Její moment síly (působící v hmotném středu oblázku O) lze snadno vypočítat jako $M_{vz} = OP \cdot F_{vz} \mathbf{e}_y$, kde \mathbf{e}_y je jednotkový vektor ve směru osy y a P je střed ponořené části. Derivací obecných pohybových rovnic rotujících objektů lze snadno odvodit tuto rovnici:

$$\ddot{\theta} + \omega^2(\theta - \theta_0) = \frac{M_0}{J_1}, \quad (14.11)$$

kde $\omega = [(J_0 - J_1)/J_1]\phi_0$, kde ϕ_0 je počáteční úhlová rychlost (ve směru \mathbf{n}), a J_0 a J_1 jsou momenty setrvačnosti ve směrech \mathbf{n} a \mathbf{t} ; θ_0 je počáteční náklon a $M_0 = OP \cdot \mathbf{F}_{vz}$ je projekce momentu vztlakové síly do směru osy y . Za pomoci několika málo aproximací dostaneme podmínku

$$\dot{\phi}_0 \approx \omega \gg \sqrt{\frac{g}{a}}. \quad (4.12)$$

4. Diskuse

Pokud dosadíme opět poloměr 10 cm, pak rovnice (14.12) říká, že $\dot{\theta} \gg 14 \text{ s}^{-1}$, což odpovídá frekvenci otáčení pár otáček do sekundy (2 Hz). Tato podmínka je v praxi velmi jednoduše splněna a odpovídá přibližně tomu, co intuitivně očekáváme pro úspěšný hod.

5. Závěr

Získali jsme kvantitativní vztahy, resp. podmínky, které musí být splněny pro odskočení oblázku od vodní hladiny. Tyto podmínky jsou samozřejmě v reálné situaci modifikovány mnoha nepředvídatelnými faktory, ať již zvlněním vodní hladiny, poryvy větru či neideálním tvarem oblázku.

Maximální počet žabek v námi provedeném experimentu byl 16.

(15) Název: Dva komíny

Ročník: 17.; 2003 – 2004

Č. úlohy: 10

Text: Dva komíny stojí na krabici s jednou průhlednou stranou. Pod každým komínem je svíčka. Za krátkou dobu poté, co byly svíčky zažehnuty, se jeden plamen stane nestabilním. Prozkoumejte tento případ a prezentujte svoji vlastní teorii toho, co se děje.

1. Experiment

K experimentu jsme použili vlastnoručně vyrobenou stavebnici. Součástí této stavebnice byla jedna krabice, na kterou se daly napojit dvě různé tloušťky komínů. Každý komín se mohl skládat z různého počtu dílů dané šířky, což zajistilo velkou variabilitu aparatury. Při experimentování se nám osvědčilo zvýraznit proudění vzduchu dýmem z doutnajícího papíru namočeného v parafínu.

Systém se pokaždé choval stejně, jeden z komínů začal sát čerstvý vzduch dovnitř aparatury, kdežto druhým se zplodiny smíchané se vzduchem tlačily ven z aparatury. To, který komín převzal iniciativu, záleželo na mnoha faktorech. Asi nejdůležitějším byla tloušťka obou