

$$\ddot{\theta} + \omega^2(\theta - \theta_0) = \frac{M_0}{J_1}, \quad (14.11)$$

kde $\omega = [(J_0 - J_1)/J_1]\phi_0$, kde ϕ_0 je počáteční úhlová rychlost (ve směru \mathbf{n}), a J_0 a J_1 jsou momenty setrvačnosti ve směrech \mathbf{n} a \mathbf{t} ; θ_0 je počáteční náklon a $M_0 = OP \cdot \mathbf{F}_{vz}$ je projekce momentu vztlakové síly do směru osy y . Za pomoci několika málo aproximací dostaneme podmínku

$$\dot{\phi}_0 \approx \omega \gg \sqrt{\frac{g}{a}}. \quad (4.12)$$

4. Diskuse

Pokud dosadíme opět poloměr 10 cm, pak rovnice (14.12) říká, že $\dot{\theta} \gg 14 \text{ s}^{-1}$, což odpovídá frekvenci otáčení pár otáček do sekundy (2 Hz). Tato podmínka je v praxi velmi jednoduše splněna a odpovídá přibližně tomu, co intuitivně očekáváme pro úspěšný hod.

5. Závěr

Získali jsme kvantitativní vztahy, resp. podmínky, které musí být splněny pro odskočení oblázku od vodní hladiny. Tyto podmínky jsou samozřejmě v reálné situaci modifikovány mnoha nepředvídatelnými faktory, ať již zvlněním vodní hladiny, poryvy větru či neideálním tvarem oblázku.

Maximální počet žabek v našem provedeném experimentu byl 16.

(15) Název: Dva komíny

Ročník: 17.; 2003 – 2004

Č. úlohy: 10

Text: Dva komíny stojí na krabici s jednou průhlednou stranou. Pod každým komínem je svíčka. Za krátkou dobu poté, co byly svíčky zažehnuty, se jeden plamen stane nestabilním. Prozkoumejte tento případ a prezentujte svoji vlastní teorii toho, co se děje.

1. Experiment

K experimentu jsme použili vlastnoručně vyrobenou stavebnici. Součástí této stavebnice byla jedna krabice, na kterou se daly napojit dvě různé tloušťky komínů. Každý komín se mohl skládat z různého počtu dílů dané šířky, což zajistilo velkou variabilitu aparatury. Při experimentování se nám osvědčilo zvýraznit proudění vzduchu dýmem z doutnajícího papíru namočeného v parafínu.

Systém se pokaždé choval stejně, jeden z komínů začal sát čerstvý vzduch dovnitř aparatury, kdežto druhým se zplodiny smíchané se vzduchem tlačily ven z aparatury. To, který komín převzal iniciativu, záleželo na mnoha faktorech. Asi nejdůležitějším byla tloušťka obou

komínů, jen při extrémních rozdílech ostatních parametrů se občas povedlo, že výrazně širší komín se stal nasávajícím z okolí. Také byla důležitá počáteční intenzita hoření svíček, čím větší byla, tím větší byla pravděpodobnost, že komín, který je nad ní, se stane výfukem. Pokud délka komínů nebyla výrazně rozdílná, nehrála přílišnou roli, ale při větších rozdílech delší komín snáze přebíral roli výfuku. Samozřejmě měla vliv také počáteční teplota vzduchu uvnitř obou komínů.

Pokud parametry komínů nebyly extrémně odlišné, nebyl problém po stabilizaci systému v jednom stavu překlomit mírným fouknutím do výfukového komínu systém do opačného stavu (vyměnit komínům jejich role).

2. Pracovní hypotéza

Tento jev spadá do oboru termomechaniky. Při jeho zkoumání jsme zjistili, že nestabilita plamene svíčky je způsobena tím, že jedním komínem ohřátý vzduch stoupá a druhým se do krabice nasává čerstvý vzduch z okolí. Je to logické, jelikož teplý vzduch stoupá (díky snížené hustotě) a má pouze dvě možné cesty (komíny), neboť kdyby zároveň stoupal oběma z nich, uvnitř krabice by se kontinuálně snižoval tlak, tudíž by stejně časem začal jeden z komínů nasávat dovnitř.

Budeme tedy předpokládat, že se systém ustálí v termodynamicky staticky rovnovážném stavu, neboli jednotlivé veličiny nebudou záviset na čase, ale pouze na poloze. Můžeme také předpokládat platnost zákona zachování kontinuity (co dovnitř vteče, to také vyteče) i platnost stavové rovnice ideálního plynu. Bohužel nelze určit poměr mezi teplem, které vzduch za časový úsek dostane od plamenů, a které za tento časový úsek odevzdá stěnám krabice, či vysvítí skrz průhlednou stěnu. Proto v matematické teorii bereme poměr mezi teplotami v prvním a druhém komínu jako empiricky změřený.

3. Teoretické řešení

a) Proč teplý vzduch stoupá?

Pro ideální plyn i reálný plyn za podmínek blízkých normálním platí stavová rovnice

$$pV = nRT, \quad (15.1)$$

a tak je jasné, že pokud se zvýší teplota části plynu, tato část zvětší svůj objem na úkor studenější části. Jelikož ale hmotnost této části plynu zůstane stejná, zmenší se její hustota. Díky Archimédovu zákonu začne tedy tato ohřátá část plynu stoupat.

b) Stabilizace systému

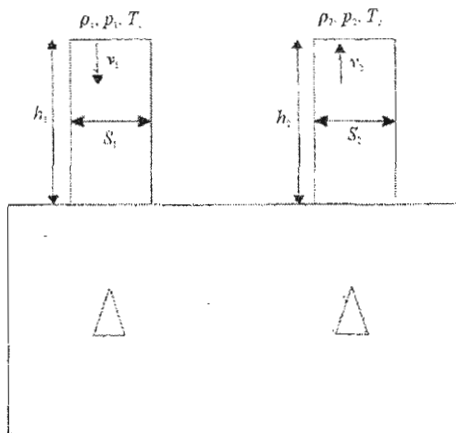
Po zapálení svíček se začne ohřívat vzduch v jejich blízkém okolí, což způsobí jeho roztažení na větší objem, neboli snížení jeho hustoty. Toto snížení hustoty způsobí díky Archimédovu zákonu tendenci tohoto teplejšího vzduchu stoupat. Pro tento vzduch existují

pouze dvě cesty nahoru, a to první či druhý komín. Jelikož pokud by teplý vzduch stoupal oběma komíny zároveň, klesal by tlak uvnitř krabice, může tedy nastat pouze jedna ze dvou situací, buď začne jedním komínem stoupat horký vzduch a druhým klesat studený vzduch z okolí, nebo obráceně.

Tento proces je závislý na mnoha parametrech. Jedním z nejdůležitějších je šířka komínů. Větší šanci převzít iniciativu mají širší komíny, jelikož širším komínem může snadněji horký vzduch stoupat. Dalším důležitým parametrem je tepelný výkon svíček, čím vyšší, tím větší šance. Samozřejmě má také pozitivní vliv výška komínu, jelikož čím vyšší komín je, tím větší je objem nadnášeného plynu a zároveň je také větší rozdíl hustoty okolního vzduchu mezi spodním a horním ústím komínu.

c) *Stabilizovaný systém*

Po stabilizaci systému se náš systém stává termodynamicky nerovnovážně statickým, což znamená, že všechny termodynamické veličiny závisí pouze na poloze, a žádná z nich se nemění v dané poloze s časem. Pro naši teorii budeme předpokládat, že vzduch je neviskózní nestlačitelná tekutina, a vzduch při průchodu komínem neztrácí vlivem jeho interakce s komínem žádnou energii (ani mechanickou, ani tepelnou). Z výše uvedeného mj. plyne, že gradient rychlosti proudění uvnitř komínu je nulový. Nákres takového systému je na obrázku 15-1, kde T označuje teplotu, ρ hustotu vzduchu u ústí komínu, S průřez komínu, p atmosférický tlak u ústí komínu a v velikost rychlosti proudění vzduchu.



Obrázek 15-1: Nákres stabilizovaného systému

d) *Určení podstatných veličin*

Pokud si vezmeme nějaký malý objem V_1 vzduchu s teplotou T_1 a hmotností m z přichozího komínu, a uvědomíme si, že při opuštění krabice má již teplotu T_2 a objem V_2 , pak můžeme z vlastností tekutin snadno odvodit závislost výstupní hustoty

$$\rho_2 = \frac{m}{V_2} = \frac{T_1 m}{V_1 T_2} = \frac{T_1}{T_2} \rho_1. \quad (15.2)$$

K určení poměru mezi vstupní a výstupní rychlostí využijeme platnost již zmíněného zákona zachování kontinuity, tedy

$$\begin{aligned} v_1 S_1 \rho_1 &= v_2 S_2 \rho_2, \\ v_2 &= \frac{T_2}{T_1} \frac{S_1}{S_2} v_1. \end{aligned} \quad (15.3)$$

Jelikož uvažujeme neviskózní nestlačitelnou tekutinu, musí platit Bernoulliho rovnice

$$p_1 + g\rho_1 h_1 + \rho_1 \frac{v_1^2}{2} = p_2 + g\rho_2 h_2 + \rho_2 \frac{v_2^2}{2}. \quad (15.4)$$

Když dáme dohromady předchozí rovnice, dostaneme závislost pro výstupní rychlost:

$$v_2 = \sqrt{\frac{\frac{p_1 - p_2}{\rho_1} - g\left(h_2 \frac{T_1}{T_2} - h_1\right)}{\frac{1}{2} \frac{T_1}{T_2} \left(1 - \frac{T_1}{T_2} \frac{S_1^2}{S_2^2}\right)}} \quad (15.5)$$

4. Dosažené výsledky

Plamen svíčky tedy opravdu začne skomírat proto, že jedním z komínů začne proudit vzduch směrem dolů, tedy proti svíčke hořící pod ním. Rychlost tohoto lze kvantitativně odhadnout podle rovnice (15.5). Ovšem tato rychlost je v realitě nižší, jelikož reálný vzduch je mírně viskózní a tře se tedy o stěny komínů (i o krabici), navíc také vzniká místní odpor v místě náhlého rozšíření, ať již do okolního vzduchu, nebo do krabice. Také by se mohla při větších rychlostech vtoků a výtoků, či extrémních délkách komínů, projevit stlačitelnost reálného vzduchu, kterou jsme zanedbali.

5. Závěr

Vypracovaná teorie je v dobré shodě s výsledky provedeného experimentu.

(16) Název: Efekt brazilského ořechu

Ročník: 17.; 2003 – 2004

Č. úlohy: 15

Text: Zatřese-se-li zmitou směsí, větší částice skončí nad těmi menšími. Prozkoumejte a objasněte tento jev. Za jakých podmínek můžeme obdržet opačné rozložení?