

d) *Určení podstatných veličin*

Pokud si vezmeme nějaký malý objem V_1 vzduchu s teplotou T_1 a hmotností m z přichozího komínu, a uvědomíme si, že při opuštění krabice má již teplotu T_2 a objem V_2 , pak můžeme z vlastností tekutin snadno odvodit závislost výstupní hustoty

$$\rho_2 = \frac{m}{V_2} = \frac{T_1 m}{V_1 T_2} = \frac{T_1}{T_2} \rho_1. \quad (15.2)$$

K určení poměru mezi vstupní a výstupní rychlostí využijeme platnost již zmíněného zákona zachování kontinuity, tedy

$$\begin{aligned} v_1 S_1 \rho_1 &= v_2 S_2 \rho_2, \\ v_2 &= \frac{T_2}{T_1} \frac{S_1}{S_2} v_1. \end{aligned} \quad (15.3)$$

Jelikož uvažujeme neviskózní nestlačitelnou tekutinu, musí platit Bernoulliho rovnice

$$p_1 + g\rho_1 h_1 + \rho_1 \frac{v_1^2}{2} = p_2 + g\rho_2 h_2 + \rho_2 \frac{v_2^2}{2}. \quad (15.4)$$

Když dáme dohromady předchozí rovnice, dostaneme závislost pro výstupní rychlost:

$$v_2 = \sqrt{\frac{\frac{p_1 - p_2}{\rho_1} - g\left(h_2 \frac{T_1}{T_2} - h_1\right)}{\frac{1}{2} \frac{T_1}{T_2} \left(1 - \frac{T_1}{T_2} \frac{S_1^2}{S_2^2}\right)}} \quad (15.5)$$

4. Dosažené výsledky

Plamen svíčky tedy opravdu začne skomírat proto, že jedním z komínů začne proudit vzduch směrem dolů, tedy proti svíčke hořící pod ním. Rychlost tohoto lze kvantitativně odhadnout podle rovnice (15.5). Ovšem tato rychlost je v realitě nižší, jelikož reálný vzduch je mírně viskózní a tře se tedy o stěny komínů (i o krabici), navíc také vzniká místní odpor v místě náhlého rozšíření, ať již do okolního vzduchu, nebo do krabice. Také by se mohla při větších rychlostech vtoků a výtoků, či extrémních délkách komínů, projevit stlačitelnost reálného vzduchu, kterou jsme zanedbali.

5. Závěr

Vypracovaná teorie je v dobré shodě s výsledky provedeného experimentu.

(16) Název: Efekt brazilského ořechu

Ročník: 17.; 2003 – 2004

Č. úlohy: 15

Text: Zatřese-se-li zmitou směsí, větší částice skončí nad těmi menšími. Prozkoumejte a objasněte tento jev. Za jakých podmínek můžeme obdržet opačné rozložení?

1. Rozbor — model

Základem jevu brazilských oříšků je tzv. perkolace neboli prosévání, kdy malé částice při některých frekvencích a amplitudách propadávají skrze mezery mezi většími částicemi. Naopak, velké částice se kromě speciálních případů nemohou dostat pod úroveň menších. Tento faktor je sám o sobě za běžných podmínek velmi slabý, k dosažení úplné segregace je třeba dlouhé doby. Na druhou stranu probíhá perkolace vždy, když dochází k jakémukoliv pohybu vrstev, tedy i při horizontálním třepání, což nemůžeme říci o ostatních faktorech.

Příčinou segregace mohou být i konvekční proudy, které jsou způsobeny třením o stěnu nádoby. Částice v blízkosti stěn se tak pohybují pomaleji než částice uprostřed. Pokud převládá zpomalování v jednom ze směrů, budou tímto směrem přesouvány i velké částice sypké látky a narozdíl od menších částic už neklesnou zpět. Efekt lze tedy ovlivnit volbou tvaru nádoby (například pro rozcházející se stěny budou největší částice přesouvány na dno).

Tekutina vyplňující nádobu hraje rovněž svoji roli. Jednak podle Stokesovy rovnice jsou zpomalovány méně částice, které mají menší poměr poloměru a hmotnosti r/m . Tak je dosaženo toho, že velké nebo lehké částice se budou pohybovat příliš pomalu a při vertikálním třepání nebudou dostatečně mobilní a mohou klesnout na dno. Druhým významným faktorem prostředí je jeho hustota. Výslednice tíhové a vztlakové síly je $g(\rho_1 - \rho)/\rho_1$ (ρ je hustota prostředí, ρ_1 oříšků), tedy pokud zvolíme takové prostředí, aby poměr $(\rho_1 - \rho)/\rho_1$ byl stejný, ale záporný, bude jakýkoli smysl segregace obrácen.

2. Pracovní hypotéza

Při řešení daného problému jsou běžné aproximace částíček sypké látky na molekuly tekutiny. Na základě této analogie bylo pojmenováno (nikoli však obstojně vysvětleno) několik jevů, jako je například *kondenzace* nebo *konvekce*. Dalším faktorem, který působí na segregaci částíček je propadávání menších mezi škvírami tvořenými většími částicemi (angl. *percolation* — prosévání). Na výsledný efekt segregace má však vliv i mnoho dalších faktorů, jako jsou viskozita prostředí, poměr hustot částic k tekutině obklopující sypkou látku v nádobě apod.

3. Simulace

Simulované faktory vyjádříme jako působící síly v závislosti na okamžité rychlosti, pozici a materiálových konstantách. Všechny tyto vztahy zapíšeme do jediné diferenciální rovnice, kterou budeme numericky propočítávat. Rázy a tření však v ní obsaženy nebudou, ty popisujeme jako speciální případy, pokud se částice nachází na pozici vyhovující podmínce pro některou vlastnost (například pro ráz dvou částic musí platit, že jsou dostatečně blízko, aby se dotýkaly). Vyjádříme si tedy síly působící na těleso:

$$\vec{F}_o = \frac{\vec{v}_o}{|\vec{v}_o|} mA \omega^2 \sin \omega t, \quad \vec{F}_g = -m\vec{g}, \quad \vec{F}_{vz} = V\rho\vec{g}, \quad \vec{F}_s = -6\pi\eta r\vec{v}.$$

Celkové zrychlení je $\vec{a} = (\vec{F}_o + \vec{F}_g + \vec{F}_{vz} + \vec{F}_s)/m$ a okamžitá pozice tělesa se vyjádří jako

$$\frac{d^2 \vec{p}}{dt^2} = \frac{\vec{F}_o + \vec{F}_g + \vec{F}_{vz} + \vec{F}_s}{m}.$$

Tuto rovnici numericky řeší naše simulace pro každé těleso (oříšek) zvlášť. Druhou částí jsou rázy. Při detekci kolize je propočítávána normálová složka rychlosti podle vzorce (v_1 a v_2 jsou rychlosti těles před srážkou, u_1 a u_2 výsledné rychlosti po srážce, index n značí normálovou, t tečnou složku rychlosti vzhledem k rovině rázu):

$$u_{1n} = \frac{(m_1 - \varepsilon m_2)v_{1n} + (1 + \varepsilon)m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2}$$

$$u_{2n} = \frac{(m_2 - \varepsilon m_1)v_{2n} + (1 + \varepsilon)m_1 v_{1n}}{m_1 + m_2}$$

Při této příležitosti je rovněž započteno tření podle $\Delta \vec{a}_t = -f \vec{a}_n$ (samozřejmě tak, aby se nezměnil směr vektoru \vec{a}_t).

4. Jednotlivé faktory — teorie

a) Perkolace

Prvním popisovaným faktorem je zjevná skutečnost, že menší částice při nahodilém pohybu mají jistou pravděpodobnost, že mezerou, kterou tvoří větší částice, propadnou o něco níž. Tato pravděpodobnost je nenulová (pokud se již částice nenachází na spodní stěně nádoby), a proto při dostatečně dlouhém třepání se nejmenší částice skutečně přesunou na dno. Vzniká jistý druh vrstvy malých částic, která už zůstane na dně a skrze tuto vrstvu proniknou pouze částice menší. Stav, kdy malé částice vyplňují prostor pod většími je navíc energeticky výhodnější, protože hmotný střed soustavy částic bude níž. Segregace nastane tak, že menší částice se budou přesouvat ve směru působení výslednice sil tíhové a vztlakové, můžeme tedy dosáhnout inverze efektu zvolením záporné hodnoty výrazu $(\rho_1 - \rho)/\rho_1$, který tuto výslednici určuje.

b) Kondenzace

Kondenzace je zvláštní faktor, který vysvětluje segregaci sypkých látek jako analogii změn skupenství. Pokud nemá sypká látka dostatek energie, její částice se chovají jako částice pevné látky, tj. nepohybují se. Tato situace může nastat, pokud jsou částice příliš těžké, příliš velké, je jich velký počet (energie se rozptýlí), nebo pokud je frekvence, popřípadě amplituda malá. Granulární substance v tomto skupenství má klesnout na dno nádoby (nebo po směru

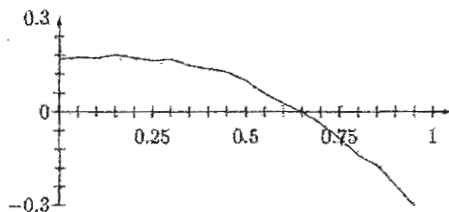
výslednice tíhové a vztlakové síly) a nepohybovat se. Pokud dostávají částice třepáním více energie, mohou se chovat jako kapalina, resp. plyn. Plyn narozdíl od kapaliny má dostatek energie k tomu, aby jeho částice zaplňovaly celý prostor nádoby. Pokud by se nám podařilo zkapalnit velké částice ve formě plynu, můžeme dosáhnout velmi výrazného, intenzivního efektu. Kromě toho je ale potřebný i velmi velký koeficient restituce, protože jinak nemůžeme přirovnávat sypkou látku k tekutinám.

c) *Konvekce*

Jako jeden z důležitých faktorů ovlivňujících segregace se jeví tření a koeficient restituce. Bylo pozorováno, že právě tyto faktory způsobují *konvekční proudy* u sypkých látek. Právě díky tření dochází při pohybu nádoby k transportu částic nedaleko okrajů na spodní nebo vrchní hladinu. Velké částice jsou těmito proudy přesunuty na vrchol, kde je pro ně již těžké pokračovat v proudění. Prvním důvodem, proč nebudou částice pokračovat, ne množství menších částic, které tvoří pro ně málo propustnou vrstvu. Druhým důvodem je fakt, že právě v tomto místě se dosud široký proud rozděluje na mnoho okrajových, výrazně užších proudů, do kterých není pro velkou částici jednoduché vstoupit. Pokud tedy obrátíme směr konvekčního proudění, obrátíme i směr segregace. Nalezli jsme dva hlavní způsoby, jak toho dosáhnout. Prvním způsobem je použít takové materiály, aby byla hodnota $(\rho_1 - \rho)/\rho_1$ (ρ_1 je hustota oříšků, ρ hustota prostředí) záporná, v tom případě převládne transport částic tření směrem nahoru, hlavní proud tedy bude směřovat dolů, a tam se rovněž budou hromadit částice. Obrátit konvekční proudění můžeme i volbou vhodného tvaru nádoby. Pokud zařídíme, aby částice při pohybu směrem nahoru těly o zdi nádoby mnohem méně než při opačném pohybu (například rozsbhajícími se stěnami), dosáhneme inverzní segregace. Žádný z těchto jevů ale nenastává při horizontálním třepání, protože tam nedochází ke vzniku konvekčních proudů.

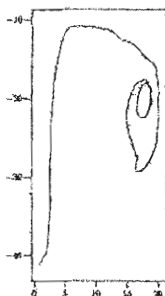
5. Dosažené výsledky — diskuse

Po nasimulování některých případů jsme došli k závěrům shodujícím se s teorií. Na obrázku 16-1 je vidět, že pro malé hodnoty koeficientu restituce převládá perkolace. Ale při vysokých hodnotách, kdy můžeme přirovnávat sypkou látku ke kapalině, dochází ke standardnímu chování, tedy větší a těžší molekuly klesají na dno, a to tím výrazněji, čím je koeficient restituce větší.



Obrázek 16-1: Graf rychlosti segregace v závislosti na koeficientu restituce.

Rovněž teorii konvekčních proudů v sypkých látkách máme podloženu výsledky ze simulace. Na obrázku 16-2 je znázorněna trajektorie velké částice, která vystoupá s hlavním proudem, ale nemůže vstoupit do vedlejšího proudu, a tak zůstává oscilovat na místě.



Obrázek 16-2: Trajektorie velké částice.

6. Závěr

Problém brazilských oříšků představuje v poslední době značně aktuální jev, kdy se mohou při třepání jednotlivé částice sypké látky v nádobě seřadit tak, že větší jsou navrchu. Někdy může nastat inverzní efekt, kdy se největší částice nacházejí vespod nádoby.

(17) Název: Malá pole

Ročník: 17.; 2003 – 2004

Č. úlohy: 16

Text: Skonstruujte zařízení založené na střelce kompasu a užitje jej k měření magnetického pole Země.

1. Rozbor — model

Jde o sestavení zařízení, které umožňuje měření magnetického pole, resp. měření jeho horizontální složky (měření vertikální složky je komplikované, neboť vertikální kompas není komerčně vyráběnou záležitostí a jeho „domácká“ výroba je poměrně komplikovaná). K měření horizontální složky pole jsme použili metodu měření zemského magnetismu pomocí tangentové