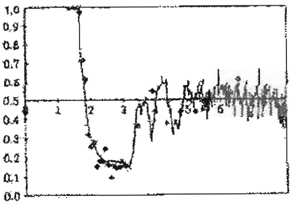
můžeme odečíst nejmenší výšku, kde je pravděpodobnost dopadu hlavou i orlem stejná pro parametry zmiňované v úvodu je tato výška v rozmezí od 1,80R do 1,85R.



Obrázek 23-7: Závislost pravděpodobnosti dopadu hlavou nahoru na výšce. Spojitá křivka je výsledkem teorie, znaky • vyjadřují výsledky experimentů.

6. Dosažené výsledky

Měřili jsme relativní četnost dopadu hlavou nahoru v závislosti na výšce — ta se pohybovala v rozsahu od 1,5R do 8R (viz obr. 23-7). Chyba měření výšky mince by neměla přesáhnout 0,3 mm.

Z výsledků experimentů můžeme odhadnout nejmenší výšky, kdy je pravděpodobnost dopadu hlavou i orlem nahoru stejná, ta je mezi 1,79R a 1,91R.

7. Závěr

Teoretické výsledky tedy byly poměrně dobře potvrzeny experimenty, přičemž jsme zanedbali vibrační charakter srážky a obtékání mince. Pro přesnější popis by bylo třeba vyřešit vibrace mince a podložky [23-1] a pro větší výšky navíc započítat obtékání [23-2].

Literatura

[23-1] Goldsmith, W.: Impact. The Theory and Physical behavior of colliding solids. London, Arnold, 1960.

[23-2] Rebuffet, P.: Aérodynamique Expérimentale. Paris, Béranger, 1945.

[23-3] Horák, Z.; Krupka, F.; Šindelář, V.: Technická fysika. Praha, SNTL,1961.

(24) Název: Rampouchy

Ročník: 11.; 1997 – 1998

Č. úlohy: 17

Text: Prozkoumejte a vysvětlete tvorbu rampouchů.

1. Úvod

S jevem jako jsou rampouchy se můžeme často setkávat i v našich klimatických podmínkách, které třeskutými mrazy příliš neoplývají. Krásné ledové tvary rampouchů visící pod střechami domů nás jistě zaujaly již v našem raném dětství a styl se pro mnohé z nás jakýmsi symbolem zimy. Nikdo se však jistě nezamýšlel nad tím, jak tyto zvláštní, na pohled jednoduché tvary vlastně vznikají a jaké podmínky jsou k tomu zapotřebí. Nikoho také určitě nenapadlo, že by někdy mohly být rampouchy i na obtíž. Mohou totiž být nebezpečné v případě tání, když hrozí pádem na pod nimi jdoucí chodce. Jejich ledová hmota také způsobuje nežádoucí zatížení střešních konstrukcí, např. okapů. Proto může mít studium jejich utváření i praktický význam pro stavební inženýry.

Ve skutečnosti rampouchy vznikají při teplotách pod nulou, kdy na střechách sluneční paprsky rozehřívají sníh, který taje, a voda potom stéká po střeše dolů a na převislých místech mrzne a utváří hmotu rampouchu.

Cílem této práce je teoreticky fyzikálně vysvětlit princip formování rampouchů a zdůvodnit tak jejich pozorováním strukturu a tvary, které skutečně nejsou tak zcela jednoduché, jak se na první pohled mohou zdát. Z teorie i z praxe tak například vyplývá, že ne všechnu hmotu rostoucího rampouchu tvoří led, ale že uvnitř kuželu rampouchu zůstává uzavřeno kapalné válcovité jádro, jehož poloměr r_0 je po celé délce rampouchu konstantní a je roven poloměru převislé kapky, která odkapává z vrcholu rampouchu. Rampouch tedy také není klasický kužel s ostrou špičkou, ale kužel komolý, jehož vrchol tvoří ploška právě s poloměrem r_0. U vrcholu je tedy kapalné jádro ze stran uzavřeno jen velmi tenkou ledovou vrstvičkou, jejíž tloušťka je rovněž konstantní (přibližně 75 μm). Kapalné jádro postupně zamrzá převážně až po skončení růstu rampouchu (v této práci to neuvažujeme), a to díky tepelnému přenosu skrz ledovou vrstvu.

2. Model

a) Popis modelu

Růst rampouchu v tomto modelu popisujeme na základě analytického přístupu a za pomoci úvah o tepelné výměně mezi vodou stékající po těle rampouchu a okolním vzduchem. Protože tvar a rozměry rampouchu závisí na mnoha konstantách, vyjadřujeme výsledky v bezrozměrné poměrové formě, například v poměru k poloměru kapalného jádra. Vzhledem ke složitosti jevu a k množství parametrů, které mohou růst ovlivnit, bylo třeba některé nepatrné vlivy či okolnosti zanedbat, jak je uvedeno níže. To však nijak podstatně neovlivnilo vlastnosti tohoto modelu.

Obecně rozlišujeme dvě stádia růstu rampouchu. V první fázi přitékající voda částečně zamrzá na bočním povrchu rampouchu a způsobuje tak růst rampouchu do šířky, ale nějaká voda ještě dosahuje vrcholu rampouchu, kde malá část mrzne a způsobuje tak růst do délky a zbytek odkapává. Pokud dosáhne rampouch tzv. kritické délky, všechna přitékající voda již mrzne na bočním povrchu a žádná se tedy nedostává na vrchol. Nastává tedy druhá fáze růstu a rampouch roste jenom do šířky.

b) *Použité proměnné*

α	sklon bočního povrchu rampouchu, rovnice (24.17)
A	boční povrch
B	bezrozměrné číslo, rovnice (24.7)
C	bezrozměrné číslo, rovnice (24.11)
h	koeficient přenosu tepla ($W.m^{-2}.K^{-1}$)
k	koeficient, rovnice (24.2)
l	délka rampouchu (m)
L	bezrozměrná délka rampouchu, rovnice (24.7)
L_F	skupenské teplo tání ($J.kg^{-1}$)
m_1	hmotnost rampouchu (kg)
m_T	celková přiteklá hmotnost vody (kg)
M	bezrozměrná hmotnost, rovnice (24.14) a (24.15)
m_D	rychlost odkapávání ($kg.s^{-1}$)
m_O	rychlost přítoku ($kg.s^{-1}$)
M_D	bezrozměrný odkapávací poměr, rovnice (24.11)
r	poloměr rampouchu
r_0	poloměr kapalného jádra = poloměr převislé kapky (považován za konstantní) (m)
R	bezrozměrný poloměr, rovnice (24.4)
T	bezrozměrný čas, rovnice (24.4)
Q	tepelné ztráty z povrchu rampouchu (W)
X	bezrozměrná horizontální vzdálenost (poloměr) od vertikální osy, rovnice (24.19)
Y	bezrozměrná vertikální vzdálenost od základny (paty) rampouchu, rovnice (24.20)
ΔT	rozdíl mezi teplotou povrchu rampouchu a okolního vzduchu (K)
δ	tloušťka mezi teplotou povrchu rampouchu a okolního vzduchu (K)
ρ	hustota ledu ($kg.m^{-3}$)

3. Teoretické řešení

a) *První fáze růstu*

Celkové tepelné ztráty z povrchu rampouchu do chladnějšího okolního vzduchu jsou úměrné rozdílu teplot ΔT a koeficientu tepelného přenosu h, který již zahrnuje ztráty způsobené tepelným přenosem i ztráty způsobené vypařováním. Tepelné ztráty z bočního povrchu z horizontálního průřezu o tloušťce δl a poloměru r jsou úměrné množství ledu, které se vytvoří.

Tedy:

$$2\pi r dl h \Delta T dt = \rho L_F dl d\left(\pi r^2\right) \tag{24.1}$$

Koeficient h ovšem není konstantní, ale závisí na poloměru rampouchu. Ze vztahu mezi Nusseltovým číslem a Reynoldsovým číslem získáváme vyjádření této závislosti:

$$Nu = c\,\mathrm{Re}^k \Rightarrow h = h_0\left(\frac{r_0}{r}\right)^{1-k} \tag{24.2}$$

Koeficient k vzrůstá s rostoucím Reynoldsovým číslem od 0,33 (pro 0,4 < Re < 4) do 0,80 (pro 4×10^4 < Re < 4×10^5). To znamená, že koeficient tepelné výměny klesá s rostoucím poloměrem (pro každé $k < 1$). Integrací rovnice (24.1) s použitím rovnice (24.2) dostaneme vyjádření bezrozměrného poloměru rampouchu jako funkce bezrozměrného času:

$$R = \left[(2-k)T + 1\right]^{\frac{1}{2-k}}, \tag{24.3}$$

kde

$$R = \frac{r}{r_0}; \qquad T = \frac{h_0 \Delta T}{L_F \rho r_0} t. \tag{24.4}$$

Pro každou reálnou hodnotu k ($0 < k < 1$) tedy rychlost radiálního růstu klesá s časem. Rovnice (24.3) může být v tomto tvaru aplikována na libovolný horizontální průřez rampouchu, jestliže je čas počítán od momentu, kdy vrchol rampouchu dosáhl této oblasti.

Růst rampouchu do délky určíme z předpokladu, že tepelné ztráty z vrcholu rampouchu probíhají z kulové převislé kapky o poloměru r_0 a rampouch tak roste do délky. Můžeme tedy psát:

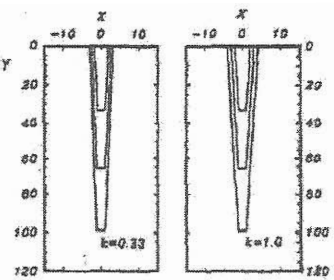
$$2\pi r_0^2 h_D \Delta T_D \mathrm{d}t = \rho L_F 2\pi r_0 \delta \mathrm{d}l \tag{24.5}$$

Pro zjednodušení v celém tomto modelu zanedbáváme vliv přechlazení vody, jehož hodnotu je beztak velice obtížné určit. Pro bezrozměrnou délku rampouchu jako funkce bezrozměrného času integrací rovnice (24.5):

$$L = BT, \tag{24.6}$$

kde

$$L = \frac{l}{r_0}; \qquad B = \frac{r_0 h_D \Delta T_D}{\delta h_0 \Delta T}. \tag{24.7}$$



Obrázek 24-1: Bezrozměrné profily získané z rovnic (24.3) a (24.6) dvou rampouchů pro koeficient k rovný 0,33 a 1,0. Tvary jsou zakresleny ve třech bezrozměrných časových intervalech T = 1, 2, 3. Bezrozměrné číslo B je rovno 33.

Užitím rovnic (24.3) a (24.6) již můžeme získat různé profily rampouchu pro různé koeficienty k (viz. obr. 24-1). Zde můžeme předpokládat, že tepelný tok z vrcholu rampouchu je roven bočnímu tepelnému toku z rampouchu o poloměru r_0 (tedy $h_D \Delta T_D = h_0 \Delta T$). Pro známé konstanty — r_0 položme například rovno 2,5 mm a pro $\delta = 75$ µm — tak dostáváme hodnotu B (= 33). Je tedy vidět, že rychlost délkového růstu závisí pouze na těchto konstantách, zatímco rychlost radiálního růstu v daném průřezu klesá pro $k < 1$ s časem. Čím větší je hodnota k, tím klesá hodnota koeficientu tepelné výměny h s rostoucím poloměrem pomaleji a rostoucí rampouch stejné délky je tedy tlustší. I pro nízké hodnoty k se však geometrie rampouchu příliš neliší od klasického kužele.

Změna hmotnosti rampouchu je rovna rozdílu mezi přítokem a odkapáváním a zároveň poměru tepelných ztrát z celého povrchu rampouchu a skupenského tepla tání:

$$\frac{\mathrm{d}m_1}{\mathrm{d}t} = m_O - m_D = \frac{Q}{L_F} \tag{24.8}$$

Zde předpokládáme, že se tepelné ztráty dějí jen z bočního povrchu rampouchu. Integrací přes tuto oblast z rovnic (24.3) a (24.6) dostáváme:

$$Q = \pi h_0 \Delta T r_0^2 B \left\{ \left[(2-k)T + 1\right]^{\frac{2}{2-k}} - 1 \right\} \tag{24.9}$$

Užitím rovnic (24.8) a (24.9) obdržíme vztah pro bezrozměrný odkapávací poměr jako funkci bezrozměrného času:

$$M_D = 1 - BC \left\{ \left[(2-k)T + 1\right]^{\frac{2}{2-k}} - 1 \right\}, \tag{24.10}$$

kde

$$M_D = \frac{m_D}{m_O}; \qquad C = \frac{\pi h_0 \Delta T r_0^2}{m_O L_F}. \tag{24.11}$$

Je zřejmé, že tento poměr klesá s časem, protože stále více vody mrzne na bočním povrchu a nedosahuje vrcholu. Pro malé hodnoty koeficientu k klesá rychlost mrznutí s poloměrem rychleji, a tedy rychlost odkapávání s časem klesá pomaleji. Jestliže se sníží přítok nebo se zvýší koeficient tepelného toku, bezrozměrná čísla B a C rostou a bezrozměrný poměr odkapávání klesá rychleji s časem. Protože bezrozměrný čas závisí dle rovnice (24.4) na koeficientu tepelných ztrát pokles doby, která je potřeba k dosažení jistého odkapávacího poměru.

Jestliže odkapávací poměr dosáhne nuly, rampouch přestává růst do délky, neboť se již žádná voda nedostává na vrchol rampouchu. Nastává druhá fáze růstu. Kritický bezrozměrný čas, který je potřeba k dosažení tohoto stavu, získáme z rovnice (24.10) položením $M_D = 0$:

$$T_C = \frac{-1 + \left(1 + \frac{1}{BC}\right)^{\frac{2-k}{2}}}{2-k} \tag{24.12}$$

Jestliže vzroste přítok nebo klesnou tepelné ztráty, čas potřebný k dosažení tohoto kritického stavu vzroste. Když tepelný tok klesá s poloměrem pomaleji (větší koeficient k), kritický čas je kratší. Při velkých hodnotách součinu BC je však kritický čas téměř nezávislý na k a je prostě roven $1/(2BC)$. V kritickém momentu dosáhne poloměr rampouchu a paty kritické hodnoty a délka rampouchu je maximální:

$$R_{RC} = \left(1 + \frac{1}{BC}\right)^{\frac{1}{2}}; \qquad L_C = B\frac{-1 + \left(1 + \frac{1}{BC}\right)^{\frac{2-k}{2}}}{2-k} \tag{24.13}$$

Je tedy vidět, že kritický poloměr paty rampouchu nezávisí na k, tedy není závislý na rychlosti změny tepelného přenosu s poloměrem.

Můžeme také získat hmotnost rampouchu jako funkci času, a to integrací rovnice (24.8) s užitím rovnice (24.9). Vyjádříme tak tzv. bezrozměrnou hmotnost rampouchu, kterou získá během první fáze, což je vlastně počet kapek a poloměru r_0, které utvoří rostoucí rampouch:

$$M_1 = \frac{\frac{3}{4}B}{4-k}\left\{\left[(2-k)T + 1\right]^{\frac{4-k}{2-k}} - 1\right\} - \frac{3}{4}BT, \tag{24.14}$$

kde

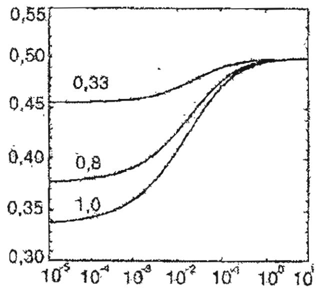
$$M_1 = \frac{m_1}{\frac{3}{4}\pi\rho\, r_0^3}.$$

Rychlost nárůstu hmotnosti rampouchu roste s časem a je větší pro větší hodnoty koeficientu k. Největší hodnoty dosahuje v okamžiku, kdy se zastaví odkapávání, a je zde rovna přítoku.

Celkovou hmotnost vody, která přiteče k patě rampouchu, lze vyjádřit lineární funkcí času, protože přítok považujeme za konstantní. Proto

$$M_T = \frac{3}{4C}T, \qquad \text{kde } M_T = \frac{m_T}{\frac{3}{4}\pi\rho r_0^3}. \tag{24.15}$$

Bezrozměrná hmotnost přiteklé vody je tedy vlastně opět počet kapek přiteklých k patě rampouchu. Protože se v definici bezrozměrného času objevuje vnější tepelný tok, je jasné, že se musí v rovnici (24.15) objevit i bezrozměrné číslo C, aby eliminovalo vliv tepelného toku na celkovou přiteklou hmotnost.



Obrázek 24-2: Poměr hmotnosti rampouchu a nakumulované hmotnosti kapaliny v kritickém čase, rovnice (24.16) jako funkce bezrozměrného produktu BC pro tři hodnoty koeficientu k.

Poměr hmotnosti rampouchu k celkové hmotnosti přiteklé vody v kritickém čase tedy je:

$$\frac{m_1(T_C)}{m_T(T_C)} = \frac{2-k}{4-k}\cdot\frac{BC}{-1+\left(1+\frac{1}{BC}\right)^{\frac{2-k}{2}}}\cdot\left[\left(1+\frac{1}{BC}\right)^{\frac{1-k}{2}}-1\right]-BC \tag{24.16}$$

Hmota rampouchu ve chvíli, kdy přestalo odkapávání, tak reprezentuje asi 33,3% až 50% přiteklé vody (obr. 24-2). Menší přítok či efektivnější tepelné ztráty způsobí, že tento hmotnostní poměr je větší. Větší je také v případě rychlejšího poklesu tepelné výměny s rostoucím poloměrem. To se děje proto, že při menších hodnotách koeficientu k je potřeba delší čas na dosažení kritického poloměru u paty rampouchu, který je nezávislý na k. Během tohoto delšího času vzrůstá délka rampouchu i jeho hmotnost. Dále je zajímavé si povšimnout, že rostoucí rampouch je v přeměně vody na led poměrně efektivní.

b) Druhá fáze růstu

Pro jednoduchost budeme předpokládat, že v této fázi růstu může být vertikální průřez rostoucí části bočního povrchu rampouchu nahrazen přímou čarou pro libovolnou hodnotu k. Dále je zde předpokládáno, že tepelný tok je konstantní, a proto velikost plochy, na které mrzne voda, zůstává v čase konstantní. Voda tedy mrzne v jednotlivých vrstvách a boční povrch rostoucího rampouchu zůstává rovnoběžný s povrchem v kritickém čase. Jinak řečeno, sklon vnějšího povrchu blízko paty rampouchu zůstává konstantní.

V kritickém čase voda mrzne na celém bočním povrchu rampouchu. Tento povrch můžeme přibližně vyjádřit rozdílem povrchu kuželu o poloměru r_{RC} a o výšce ar_{RC} (a je sklon bočního povrchu rampouchu) a plochy kuželu o poloměru r_0 a výšce ar_0:

$$A_C = \pi r_{RC}^2 \sqrt{1+a^2} - \pi r_0^2 \sqrt{1+a^2}\,, \tag{24.17}$$

kde

$$a = \frac{L_C}{R_{RC} - 1}\,.$$

Tuto konstantní plochu lze vyjádřit jako funkci poloměru paty rampouchu r_R a vzdálenosti x od osy rampouchu k čelu mrznutí, budeme-li předpokládat konstantní sklon povrchu. Čelo mrznutí je oblast podél stěny rampouchu, za kterou se již nedostává žádná kapalná voda. Proto je A_C dáno vztahem:

$$A_C = \pi r_R^2 \sqrt{1+a^2} - \pi x^2 \sqrt{1+a^2} \tag{24.18}$$

Porovnáním rovnic (24.17) a (24.18) dostáváme pro bezrozměrnou vzdálenost od osy rampouchu k jeho ustupujícímu čelu mrznutí:

$$X = \sqrt{1 + R_R^2 - R_{RC}^2}\,, \tag{24.19}$$

kde

$$X = \frac{x}{r_0}\,.$$

Obdobně získáme bezrozměrnou vertikální souřadnici:

$$Y = a\left(R_R - \sqrt{1 + R_R^2 - R_{RC}^2}\right), \tag{24.20}$$

kde

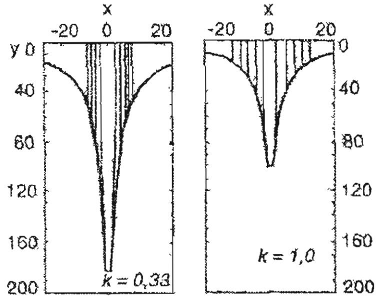
$$Y = \frac{y}{r_0}\,.$$

Rovnice (24.19) a (24.20) dávají bezrozměrné souřadnice mrznoucího čela v závislosti na bezrozměrném poloměru rampouchu u jeho paty, který je obecně funkcí času, rovnice (24.3).

Odstraněním poloměru u paty rampouchu dostáváme na čase nezávislou veličinu popisující konečný tvar rampouchu:

$$X = -\frac{R_{RC}-1}{2L_C}Y + \frac{L_C(R_{RC}+1)}{2Y} \tag{24.21}$$

Obrázek 24-3 ukazuje různé tvary rampouchu ve chvíli, kdy přestalo odkapávání pro dvě různé hodnoty koeficientu k a pro konstantní hodnoty $B = 33$ a $C = 0{,}002$.



Obrázek 24-3:Bezrozměrné profily dvou rampouchů poté, co odkapávání ustane. Tvary rampouchů jsou zobrazeny v pěti časových intervalech T_C, ..., $5T_C$. Číslo B je rovno 33, C je 0,002 a k je 0,33 a 1,0.

Protože kritický bezrozměrný poloměr paty rampouchu nezávisí na hodnotě k, rovnice (24.13), ale delší časový interval je potřebný k jeho dosažení pro menší hodnoty k, kritická délka rampouchu je větší pro $k = 0{,}33$. Kritický bezrozměrný čas je 5,513 pro $k = 0{,}33$ a 3,012 pro $k = 1{,}0$. Na obrázku jsou znázorněny tvary pro T_C, ..., $5T_C$.

4. Experiment a dosažené výsledky

Při pokusu ověřit výsledky teoretické části jsme právě narazili na variabilitu vnějších podmínek. Zařízení, jež jsme použili, se skládalo z 10 l kanystru obráceného dnem vzhůru, v jehož zátce byl upevněn kohout a trubička na vyrovnávání tlaků. Voda odkapávající z kanystru stékala po plechu a na převisu odkapávala. Vzhledem k proměnlivosti venkovní teploty, na které jsme byli závislí, ne zcela nulová teplota přitékající vody, nemožnosti udržet stálý přítok (zamrzání přítokového otvoru a snižování hladiny v kanystru) a dalších nepřesností (například v souvislosti s odkapáváním z převisu plechu), se vyrostlé rampouchy dosti lišily od teoretického tvaru a vyskytovaly se na nich některé nepravidelnosti. Lepších výsledků bylo dosaženo při zkoumání rampouchů vzrostlých za přírodních podmínek, jejichž geometrie se s teorií ve velké míře shoduje. Jasně znatelné je na rampouchu například úzké kapalné jádro, ve kterém po zmrznutí pozorujeme uprostřed rampouchu vzduchové bubliny.

5. Závěr

Tento jednoduchý analytický model úspěšně zachycuje okolnosti růstu rampouchu a shoduje se ve velké míře se skutečností. Předvídá časově nezávisle bezrozměrné veličiny, jako jsou tvar rampouchu, velikost, odkapávací poměr či bezrozměrná hmotnost. Z těchto bezrozměrných veličin můžeme dosazením určitých konstant získat veličiny klasické. Tento přístup poskytuje obecnější pohled než různé numerické modely či experimentálně získaná data. Zajímavý je například fakt, že v momentě, kdy se odkapávání zastaví, vytvořilo 33% až 50% přiteklé vody ledovou hmotu rampouchu. Předpovězené tvary a rozměry dobře souhlasí s realitou, i když samozřejmě pouze pokud rampouch rostl za podmínek, které se alespoň přibližují ideálním předpokládaným. Pokud například se mění přítok s časem nebo voda stéká převážně po jedné straně rampouchu a podobně, mohou vznikat rozličné tvary, které se mohou od ideálu dosti lišit, ale které však teoreticky popsat je nemožné.

(25) Název: Mýdlová vrstva

Ročník: 12.; 1998 – 1999

Č. úlohy: 4

Text: Vysvětlete vzhled a vývoj barev na mýdlové vrstvě různých tvarů.

1. Úvod

S bublinami, obzvláště s těmi mýdlovými, se každý z nás setkává už od dětství. Každé malé dítě zná bublifuk a jsou lidé, kteří se dokonce vytvářením bublin živí na různých estrádách. Každý také už zřejmě pozoroval interferenční jevy na tenké vrstvě vzniklé například na kaluži pokryté vyteklým olejem, které vytváří už na první pohled zajímavé obrazce. Křehké bubliny a tenké, barvami hrající, filmy jsou něčím, co lidi evidentně přitahuje, a co se jim líbí. Na druhou stranu se na obyčejné bublině dá demonstrovat spousta základních fyzikálních jevů, povrchovým napětím počínaje a interferencí konče (nehledě na to, že při vhodně sestaveném pokusu lze na rezonujících bublinách demonstrovat i jinak složitě představitelné kvantové stavy molekul a chemické vazby).

Naším úkolem bylo vysvětlit vzhled a vývoj barev na mýdlových vrstvách různých tvarů. První část této práce se zabývá popisem základních charakteristik „mýdlového" roztoku a tenké blány, která se z něj utvoří. Jsou zde také popsány roztoky a jejich složení, které jsme při naší práci užívali. Dále se věnujeme formování mýdlové vrstvy na různých drátěných útvarech a mýdlových bublinách, vzhledem k principu zaujmutí stavu o minimální energii. Třetí kapitola konečně vysvětluje vznik interferencí a popisuje výsledky několika zajímavých experimentů sloužících ke zkoumání stavu filmu a jeho vývoje v čase.