povrchu částečně odražen v rozbíhavém svazku a na stínítku několik metrů vzdáleném se objeví mnohonásobně zvětšený obraz osvětleného místa. Ze změny tohoto obrazu s časem můžeme usuzovat na vývoj mýdlové vrstvy.

5. Experimenty — dosažené výsledky

Provedli jsme řadu pozorování mýdlových filmů na rovinných i prostorových drátěných konstrukcích či na bublinách. Jejich vývoj s časem samozřejmě závisí na použitém roztoku. Ve většině případů však můžeme pozorovat následující fáze (planární film):

1. Zpočátku lze pozorovat tenké barevné proužky, které jsou relativně stabilní.
2. Postupně, jak se film časem ztenčuje, tyto proužky se logicky rozšiřují a v horní části se zpravidla objeví „černý film", jehož hranice se postupně pohybuje směrem dolů. Obraz je v této fázi velice náchylný k vibracím.
3. Zejména u vzorků s glycerolem se do původně pravidelných proužků začínají uvolňovat barevné kapénky, které proudí až k protějšímu okraji. Na vrstvě se tak utváří řečiště a původní proužkovitý obraz se zcela zamží. Tento jev úzce souvisí s vlastnostmi roztoku a je velmi těžké jej teoreticky vysvětlit.
4. Jakmile se již „černý film" značně rozšíří, film obvykle kolabuje a praská.

6. Závěr

Byly odvozeny vztahy pro interferenci světla na tenké vrstvě a prozkoumány pozorované obrazce v závislosti na tvaru mýdlové vrstvy. Podrobně byl diskutován vliv použitých roztoků a některé jejich speciality.

Je však nutno znovu podotknout, že pozorované interference na mýdlových vrstvách jsou zajímavé nejen z fyzikálního hlediska, ale mají i svůj aspekt estetický.

(26) Název: Elektronový paprsek

Ročník: 10.; 1996 – 1997

Č. úlohy: 4

Text: Paprsek elektronů dopadá na planparalelní desku ze známého homogenního materiálu. Některé elektrony proletí, některé ne. Zkuste simulovat tento proces (např. metodou Monte Carlo) a porovnejte své výsledky s těmi uvedenými v literatuře.

1. Rozbor — model

Řešení pomocí metody Monte Carlo je řešení s využitím teorie pravděpodobnosti a statistiky. Tato metoda se používá pro řešení úloh, u nichž nelze nalézt přímý (deterministický) algoritmus pro jejich řečení, nebo u kterých by tento algoritmus byl příliš složitý nebo zdlouhavý. Jednotlivé procesy, které probíhají při průchodu elektronu látkou, jsou známé a

popsané. Při jejich skládání se však uplatňují vlivy, které nelze předem přesně určit. Při použití metody Monte Carlo se využívají modely jednoduchých procesů, do kterých je zaveden faktor náhodnosti. Skládáním těchto jednotlivých procesů pak získáme jediný proces ovlivněný jednotlivými náhodnými faktory, tímto způsobem získáme simulaci skutečného složeného procesu. Provedeme-li velké množství pokusů, získáme určité výstupní hodnoty, popřípadě jejich rozdělení. Čím více pokusů provedeme, tím více se bude výsledek přibližovat k určité hodnotě nebo určitému rozdělení.

V naší simulaci budeme vždy sledovat dráhu jednoho (primárního) elektronu, jedná se tedy o jednočásticový model. Simulace pohybu primárního elektronu se skládá z několika základních kroků. Nejprve náhodně určíme volnou dráhu, kterou elektron uletěl mezi dvěma srážkami, a vypočítáme jeho polohu. Poté určíme, o jakou srážku se jednalo a o jaký úhel se elektron odchýlil, popřípadě kolik ztratil energie. Celý proces opakujeme, dokud nezjistíme, že energie elektronu klesla na takovou hodnotu, při jaké je možno považovat elektron za pohlcený, nebo dokud elektron neopustil terč. Abychom mohli tyto procesy nasimulovat, potřebujeme určit celkové účinné průřezy nebo střední volné dráhy jednotlivých procesů a diferenciální účinné průřezy, u kterých nás zajímá závislost na úhlu rozptylu, popřípadě ztrátě energie primárního elektronu během rozptylu.

2. Pracovní hypotéza

Protože zadání úlohy je velmi obecné, bylo nutné udělat některé zjednodušující předpoklady. Rozhodli jsme se simulovat elektrony o energii v rozmezí od stovek eV do stovek keV. Dále také předpokládáme, že terč je homogenní a je tvořen atomy jednoho prvku. Pro zjednodušení bylo také nutné zanedbat některé jevy, jako například emisi sekundárních elektronů, difrakční efekty, emisi brzdného a charakteristického záření. Cílem naší práce bylo vytvořit simulátor, který bude nenáročný na vstupní parametry a přitom bude schopen daný problém uspokojivě vyřešit.

3. Teoretické řešení

a) Pružné srážky

Jak již bylo řečeno, elektron se na své dráze sráží s jednotlivými atomy terče. Podle toho, jak se mění energie elektronu při srážce, můžeme rozdělit srážky na pružné a nepružné. Dojde-li ke srážce elektronu s jádrem, je možné tuto srážku považovat za pružnou. Jedná se zde o určité přiblížení. Ve skutečnosti tato srážka není pružná, ale ztráta energie při malém úhlu rozptylu a malé atomové hmotnosti je velmi malá (okolo 10^{-2} eV). Víme, že pokud je elektron odchýlen v elektrickém poli jádra, vyzáří se určitá část jeho energie ve formě fotonu (tzv. brzdného záření). Čím je vyšší energie elektronu, tím je vyšší pravděpodobnost emise takového fotonu.

Ovšem pravděpodobnost emise se také rychle snižuje se zvyšující se vyzářenou energií, proto je ztráta energie emisí brzdného záření u většiny elektronů malá. Z tohoto důvodu lze považovat většinu srážek elektronu s jádrem atomu za přibližně pružné.

Protože rozptyl elektronu na jádře je velmi lokalizovaný, což znamená, že okolí atomu nemá na srážku vliv, lze (pro model pružné srážky) použít model pružné srážky na jednom atomu. Pro modelování pružných srážek se používá obvykle jednoho z následujících modelů rozptylu na volném atomu:

1. Tabulkové účinné průřezy
2. Rutherfordův model.
3. Mottova modifikace Rutherfordova modelu, kde je zahrnut vliv spinu elektronu.

První uvedená metoda dává velmi dobré výsledky, avšak má některé nevýhody. Při výpočtech je nutné provádět numerické integrace, které zpomalují běh simulace. Také data nejsou dostupná pro všechny látky a pro všechny energie, je zde tudíž nutnost různých aproximací. Pro naše účely jsme zvolili druhou variantu, která je o něco jednodušší než varianta třetí, avšak výsledky jsou srovnatelné. Podrobné porovnání jednotlivých metod modelování pružného rozptylu je možno nalézt v literatuře [26-1]. Uvedeme zde vztahy pro celkový účinný průřez σ a diferenciální účinný průřez $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$ pro Rutherfordův model (Ω je prostorový úhel). Při použití tohoto modelu se do výpočtu započítává vliv elektronového obalu na průběh elektrického potenciálu V. Pro potenciál podle Wentzela [26-8] platí vztah:

$$V = -\frac{e^2 Z}{4\pi\varepsilon_0 r} e^{-\frac{r}{R}},$$

kde e je náboj elektronu, ε_0 dielektrická konstanta, r vzdálenost od středu atomu a R poloměr atomu, který lze vyjádřit jako:

$$R = a_H Z^{-\frac{1}{2}},$$

přičemž Z je protonové číslo a a_H je Bohrův poloměr atomu (a_H = 0,0569 nm).

Pro diferenciální účinný průřez $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$ platí podle [26-4] vztah:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{4Z^2}{a_H^2} \frac{\left(1+\frac{E}{E_0}\right)^2}{\left[\left(\frac{4\pi}{\lambda_e}\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 + \frac{1}{R^2}\right]^2}, \tag{26.1}$$

kde λ_e je vlnová délka elektronu, E je energie atomu, E_0 je klidová energie elektronu: $E_0 = m_0c^2$ = 511 keV. Vztah (26.1) je ve tvaru pro elektrony pohybující se relativistickou rychlostí. V takovém případě je

$$\lambda_e = \frac{h}{\sqrt{2m_0E\left(1+\frac{E}{2E_0}\right)}}, \tag{26.2}$$

kde m_0 je klidová hmotnost elektronu. V případě, že se nejedná o relativistické elektrony, lze položit

$$\left(1+\frac{E}{E_0}\right)^2 = 1 \quad \text{a} \quad \lambda_e = \frac{h}{\sqrt{2m_0E}}.$$

Protože úhel θ v praxi nabývá malých hodnot, je možná aproximace $\sin(\theta/2) = \theta/2$. Pak lze vztah (26.1) upravit jako

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{4Z^2R^4}{a_H^2}\frac{1}{\left[1+\left(\frac{\theta 2\pi R}{\lambda_e}\right)^2\right]^2}. \tag{26.3}$$

Pro prostorový úhel Ω platí $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$, přičemž θ je polární úhel ($0 < \theta < \pi$) a ϕ je azimutální úhel ($0 < \phi < 2\pi$). Hodnota $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$ nezávisí na velikosti azimutálního úhle ϕ. Integrací přes celý prostorový úhel Ω získáme ve vztahu (26.1) celkový účinný průřez σ:

$$\sigma = \int_\Omega \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\mathrm{d}\Omega = 2\pi\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{16\pi Z^{\frac{4}{3}}}{\left(\frac{4\pi}{\lambda_e}\right)^2+\frac{1}{R^2}}\left(1+\frac{E}{E_0}\right)^2$$

$$\sigma = \frac{16\pi Z^{\frac{4}{3}}R^2}{\left(\frac{4\pi R}{\lambda_e}\right)^2+1} \tag{26.4}$$

Odtud lze vyjádřit hustotu pravděpodobnosti odražení elektronu v závislosti na úhlu θ:

$$f(\theta) = \frac{2\pi\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\sin\theta}{2\pi\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta} \tag{26.5}$$

Pravděpodobnost p odražení elektronu do úhlu α je tedy

$$p = \int_0^\alpha f(\theta)\,\mathrm{d}\theta. \tag{26.6}$$

Po integraci

$$p = \frac{\left(16\pi^2 R^2 + \lambda_e^2\right)\left(\cos\alpha - 1\right)}{2\left(8\pi^2 R^2 \cos\alpha - 8\pi^2 R^2 - \lambda_e^2\right)}. \tag{26.7}$$

Úpravou získáme úhel rozptylu a v závislosti na náhodném čísle R_n:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - a\sin\left[\frac{16\pi^2 R^2 \left(R_n - 1\right) + \lambda_e^2 \left(2R_n - 1\right)}{16\pi^2 R^2 \left(R_n - 1\right) - \lambda_e^2}\right] \tag{26.8}$$

Vztahy (26.1) a (26.8), které jsme odvodili v závislosti na vstupních parametrech terče a elektronu, využijeme v simulaci pro zjištění parametrů pohybu elektronu. Z celkového účinného průřezu jsme schopni vypočítat střední volnou dráhu (λ), kterou elektron urazí mezi dvěma pružnými srážkami:

$$\lambda = \frac{A}{N_A \sigma}, \tag{26.9}$$

kde N_A je Avogadrova konstanta a A je relativní atomová hmotnost. Střední volná dráha (λ) je pak dána jako hmotnostní tloušťka (kg.m^{-2}). Od tohoto okamžiku budeme veškeré vzdálenosti uvažovat v jednotkách hmotnostní tloušťky, což je obvyklé pro podobné simulace.

Pokud dojde k pružné srážce, pak ze vztahu (26.8) určíme náhodně úhel odrazu elektronu, a to tak, že za R_n dosadíme náhodné číslo z intervalu (0,1).

b) Nepružné srážky

Na rozdíl od pružné srážky není nepružná srážka tolik lokalizovaná. To znamená, že nepružnou srážku ovlivňují i okolní atomy. Při nepružné srážce elektronu s atomem je část energie elektronu předána elektronům tohoto atomu, volným elektronům nebo atomové mřížce. Při modelování nepružných srážek se často používá Betheho model postupného brždění elektronu látkou, nebo model samostatných nepružných srážek.

c) Model postupného brždění

Při použití Betheho modelu postupného brždění elektronů v látce se simulují pouze pružné srážky. To znamená, že elektron může změnit směr svého pohybu pouze během pružné srážky a změna jeho energie závisí na délce trajektorie, kterou urazil mezi dvěma srážkami. Pro množství ztracené energie pak platí známý vztah

$$\Delta W = \int_{x1}^{x2} F \, \mathrm{d}x, \tag{26.10}$$

kde F je síla působící na elektron, pro kterou platí Betheho vztah [26-4]

$$F = \frac{e^4 N_A Z}{4\pi\varepsilon_0^2 A E_0 \beta^2} \ln\left(\frac{E_0 \beta^2}{2J}\right), \tag{26.11}$$

kde $\beta = v/c$. V případě, že uvažujeme nerelativistické elektrony, lze provést substituci $E_0\beta^2 = 2E$. Dále je třeba si povšimnout proměnné J, což je střední ionizační potenciál. Ten lze podle Caldwella [26-5] vypočítat v závislosti na protonovém čísle jako

$$\frac{J}{Z} = 12\left(1 + \frac{1}{2}Z^{-1}\right) + 0{,}03Z\,.$$

Zaokrouhleně $J/Z = 13$. Při nízkých energiích však vztah (26.11) přestává dávat správné výsledky (dává zápornou ztrátu energie), a to díky logaritmickému členu. Aby bylo možné simulaci úspěšně provést, je potřeba provést určité úpravy. Buď se určí energie, při které je elektron považován za pohlcený, a v oblasti, kde ještě vztah (26.11) dává správné výsledky, nebo je třeba provést určité korekce. Podle [26-11] je možné upravit střední ionizační potenciál takto:

$$J = \frac{J_C}{1 + \frac{kJ_C}{E}}\,, \tag{26.12}$$

J_C je původní Caldwellův střední ionizační potenciál a k je rovno přibližně 0,85. Tento způsob simulace je poměrně jednoduchý, přesto s ním můžeme dosáhnout slušných výsledků.

d) Model samostatných nepružných srážek

Na rozdíl od prvního způsobu se v druhém simulují samostatně nepružné srážky. Elektron již neztrácí energii postupně mezi jednotlivými pružnými srážkami, ale v jednotlivých nepružných srážkách, v kterých také mění směr svého pohybu. Abychom mohli vytvořit takovýto model, potřebujeme znát střední volnou dráhu λ mezi dvěma nepružnými srážkami.

$$\lambda = \frac{W_{av}}{F} = \frac{1}{F}\int_{W_{\min}}^{W_{\max}} Wf(W)\,\mathrm{d}W\,, \tag{26.13}$$

kde W_{av} je střední hodnota energie ztracené při nepružné srážce, F je brzdná síla a $f(W)$ je hustota pravděpodobnosti ztráty energie W. $W_{\min}$ a $W_{\max}$ jsou hraniční hodnoty ztráty energie. V tomto modelu předpokládáme, že

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{in}}{\mathrm{d}W} = \frac{\pi e_{el}^4}{E_0 W^2}\,.$$

Hustotu ztráty energie W lze pak vyjádřit jako:

$$f(W) = \frac{\frac{\mathrm{d}\sigma_{in}}{\mathrm{d}W}}{\int_{W_{\min}}^{W_{\max}} \frac{\mathrm{d}\sigma_{in}}{\mathrm{d}W}\,\mathrm{d}W} = \frac{W_{\min}W_{\max}}{W_{\max} - W_{\min}} W^{-2} \tag{26.14}$$

Maximální ztráta energie elektronu $W_{\max}$ může být nanejvýše rovna momentální energii primárního elektronu E. Po dosazení:

$$f(W) = \frac{EW_{min}}{E - W_{min}} W^{-2} \tag{26.15}$$

Dosazením do (26.13) a integrací získáme:

$$\lambda = \frac{1}{F} \frac{EW_{min}}{E - W_{min}} \ln\left(\frac{E}{W_{min}}\right) \tag{26.16}$$

Minimální ztráta energie W_{min} je volitelný parametr, který vzhledem k vlastnostem funkce musí být větší než nula. V našem případě je postačující posadit W_{min} = 10 eV. Z daných vztahů lze vypočítat střední volnou dráhu elektronu při nepružné srážce λ v závislosti na vstupních parametrech a momentální energii primárního elektronu. Dalším vztahem, který potřebujeme znát, je závislost ztráty energie na náhodném čísle. Pravděpodobnost p, že elektron ztratí energii ΔW je

$$p(\Delta W) = \int_{W_{min}}^{\Delta W} f(W)\mathrm{d}W = \frac{E(\Delta W - W_{min})}{\Delta W(E - W_{min})}. \tag{26.17}$$

Ztráta energie ΔW v závislosti na náhodném čísle R_n je pak

$$\Delta W = \frac{EW_{min}}{R_n W_{min} - E(R_n - 1)}. \tag{26.18}$$

Této ztrátě energie odpovídá úhel rozptylu θ podle

$$\sin^2\theta = \frac{\Delta W}{E}.$$

Z volné dráhy je pak už snadné podle vztahu (26.16) získat konkrétní ztrátu energie ΔW. Úhel rozptylu elektronu při inelastické srážce závisí na ztrátě energie:

$$\sin^2\theta = \frac{\Delta W}{E_0} \tag{26.19}$$

Veškeré uvedené výpočty úhlů pro pružnou i nepružnou srážku se týkají směrového úhlu θ. Azimutální úhel ϕ se získá z jednoduchého vztahu:

$$\phi = 2\pi R_n$$

e) Rozlišení srážek

Nyní známe střední volné dráhy pro jednotlivé typy srážek. Pro celkovou střední volnou dráhu λ_t elektronu platí:

$$\frac{1}{\lambda_t} = \frac{1}{\lambda_{elast}} + \frac{1}{\lambda_{inel}}$$

Další důležité vztahy jsou vztahy pro výpočet polohy a směru pohybu elektronu po srážce. Označme si x_n, y_n, z_n souřadnice elektronu po n-té srážce a Θ_n, Φ_n směrový a azimutální

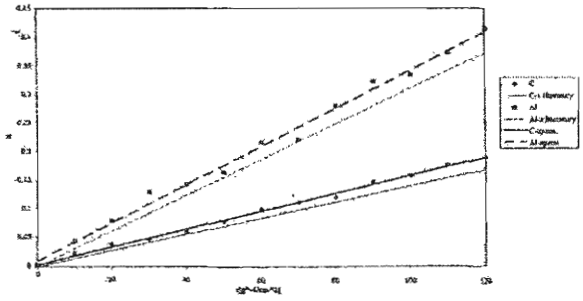
úhel. Θ, Φ označíme velikosti úhlů získané pomocí náhodného procesu popsaného výše. Pro výpočet změny směru po každé srážce (Θ_n, Φ_n) ze směru předešlého využijeme vztahů:

$$\cos\Theta = \cos\Theta_{n-1}\cos\Theta - \sin\Theta_{n-1}\sin\Theta\sin\Phi,$$

$$\sin\Theta_n = \sqrt{1-\cos^2\Theta_n},$$

$$\sin\Phi_n = \frac{\cos\Phi_{n-1}\left(\cos\Theta_{n-1}\sin\Theta\sin\Phi + \cos\Theta\sin\Theta_{n-1}\right) - \sin\Phi_{n-1}\sin\Theta\cos\Theta}{\sin\Theta_n},$$

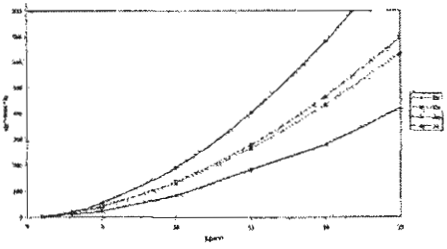
$$\cos\Phi_n = \frac{\sin\Phi_{n-1}\left(\cos\Theta_{n-1}\sin\Theta\sin\Phi + \cos\Theta\sin\Theta_{n-1}\right) + \cos\Phi_{n-1}\sin\Theta\cos\Theta}{\sin\Theta_n}.$$



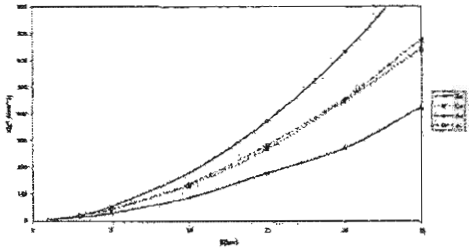
Obrázek 26-1: Koeficienty odrazu pro tenké vrstvy C, Al. Výsledky jsou znázorněny proložením tučnými čarami. Tenké přímky znázorňují výsledky převzaté z literatury.

4. Dosažené výsledky — diskuse

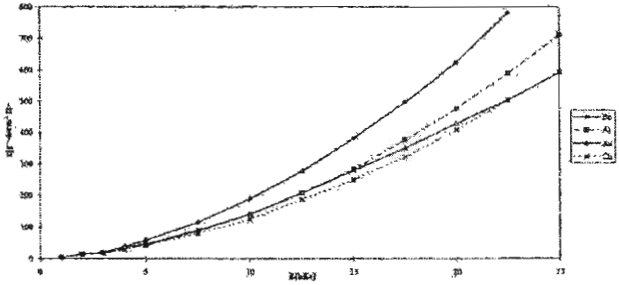
Jako první jsme se rozhodli zjisti hodnoty koeficientu odrazu pro tenké vrstvy materiálu. Protože při takovýchto simulacích se uplatňuje především model pružné srážky, lze výsledků použít ke kontrole správnosti použitého modelu elastických srážek (v našem případě Rutherfordova modelu). Provedli jsme simulace pro elektrony o energii 50 keV procházející hliníkem a uhlíkem (obr. 26-1). Pro porovnání uvádíme také výsledky obdobné simulace provedené v. Starým [26-1].



Obrázek 26-2a: Střední doběh elektronů v Be, Cu, Au, Al v závislosti na jejich energii; použit model postupného brždění.



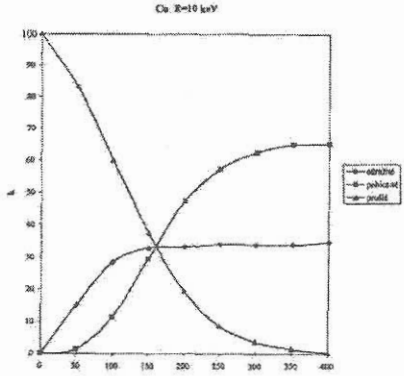
Obrázek 26-2b: Střední doběh elektronů v Be, Cu, Au, Al v závislosti na jejich energii; model samostatných nepružných srážek.



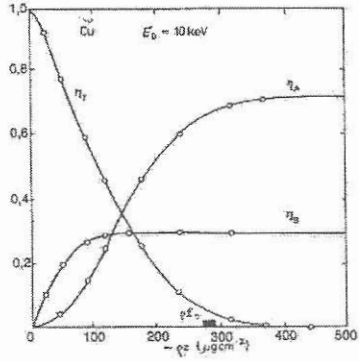
Obrázek 26-2c: Střední doběh elektronů v Be, Cu, Au, Al v závislosti na jejich energii; experimentální výsledky převzaté z literatury.

Přesto, že se v zadání mluví o planparalelní desce, rozhodli jsme jako další simulovat průchod elektronů nekonečně hlubokým tělesem. Z této simulace jsme schopni zjistit střední délku doběhu x elektronu v dané látce (Al, Be, Cu), pro oba modely nepružné srážky viz obr. 26-2a, 26-2b. Pro porovnání uvádíme také experimentální výsledky [26-7] převzaté z [26-9] (obr. 26-2c). Jak je patrné z obrázků, dosáhli jsme poměrně dobrých výsledků pro berylium a hliník. Pro měď a především pak pro zlato již výsledky tak dobré nejsou.

Jako poslední jsme, podle zadání, simulovali průchod elektronů o energii 10 keV deskou z mědi a zjišťovali množství elektronů, které deskou prošly, byly odraženy, nebo pohlceny (obr. 26-3a). Pro porovnání uvádíme data uvedená v [26-5] (obr. 26-3b). I když, jak ukazuje předešlá simulace, náš simulátor nedosahuje tak dobrých výsledků pro měď jako pro jiné prvky, rozhodli jsme se provést tuto simulaci především proto, že jsme měli k dispozici data pro porovnání našich výsledků.



Obrázek 26-3a: Koeficienty pro odraz, pohlcení a množství prošlých elektronů o energii 10 keV měděnou deskou v závislosti na její tloušťce; výsledky naší simulace (použit model postupného brždění).

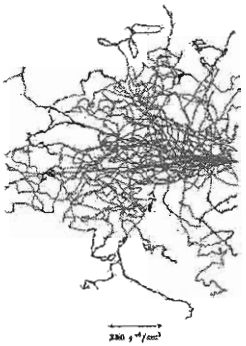


Obrázek 26-3b: Koeficienty pro odraz, pohlcení a množství prošlých elektronů o energii 10 keV měděnou deskou v závislosti na její tloušťce; výsledky uvedené v literatuře.

Poslední obrázek (č. 26-4) ukazuje trajektorie elektronů vypočítané během předchozí simulace. Paprsek elektronů o energii 10 keV vstupuje do měděné desky o tloušťce 250 $\mu g.cm^{-2}$ (v místě, kam ukazuje šipka). Na obrázku je jasně vidět, jak se elektrony v látce rozptylují, popřípadě jak látku opouští.

5. Závěr

Nejvíce simulací jsme provedli pro hliník, berylium a měď. Tyto látky jsme vybrali především proto, že pro ně bylo možné získat příslušná data pro porovnání. Přestože je naše simulace velmi jednoduchá a nedokonalá, podařilo se nám získat některé výsledky srovnatelné s výsledky uváděnými v literatuře.



Obrázek 26-4: Ukázka trajektorií elektronů o energii 10 keV procházejících mědí o tloušťce 250 $\mu g.cm^{-2}$.

Literatura

[26-1] V. Starý: The Check of the Elastic Scattering Model in Monte-Carlo Simulation, Microchim. Acta (1996)

[26-2] V. Starý: Check of the Inelastic Scattering Model in Monte-Carlo Simulation

[26-3] R. Reichelt, A. Engel: Monte-Carlo calculations of elastic and inelastic electron scattering in biological and plastic materials, Ultramicroscopy, Vol. 13, p. 279 (1984)

[26-4] L. Reimer: Transmission Electron Microscopy, Springer-Verlag, 1984

[26-5] V. Hulínský, K. Jurek: Zkoumání látek elektronovým paprskem, SNTL, 1983

[26-6] J. J. Quin: Range of Excited Electrons in Metals, Physical Review, Vol. 126, p. 1453 (1962)

[26-7] K. Kanya, K. Kawatsu: J. Phys. D5 (1972)

[26-8] G. Wentzel, Ann. Phys. 1922, 69. 335

[26-9] K. L. Hunter, I. L. Snook, H. K. Wagenfeld: Monte Carlo study of electron transmission and backscattering from metalic thin films, Physical Review, Vol. 54, 7, 1996

[26-10] R. Shimitsu, Y. Katayoka, T. Ikuta, T. Koshikawa, H. Hashimoto: A Monte Carlo approach to the direct simulation of electron penetration in solids, J. Phys. D: Appl. Phys., Vol. 13, p. 559

[26-11] D. C. Joy, S. Luo, Scanning, 1989, 11, 176

[26-12] F. Fabian, Z. Kluiber: Metoda Monte Carlo a možnosti jejího uplatnění, Prospektrum, Praha 1998, 148 str.